

# **Test d'Ipotesi**

**Corso di Probabilità ed Inferenza**

a.a. 2009/2010 Secondo Periodo

**Prof. Filippo DOMMA**

**Corso di Laurea Magistrale in Economia Applicata**

Facoltà di Economia – UniCal

Il test statistico è una decisione operativa presa sulla base di risultati sperimentali, tenendo conto di considerazioni probabilistiche.

La problematica del test può essere suddivisa in tre fasi:

- a.** formulare una ipotesi sulla v.c.  $X$ ;
- b.** osservare il campione casuale;
- c.** in base ai risultati campionari decidere se accettare o rifiutare l'ipotesi fatta.

**Definizione.** Un'ipotesi statistica è una affermazione sulla distribuzione di una o più variabili casuali.

Se l'ipotesi statistica specifica completamente la distribuzione della v.c. allora l'ipotesi è detta semplice; in caso contrario, viene chiamata ipotesi statistica composta.

Le ipotesi verranno indicate con la lettera H.

Esempi. Data una v.c.  $X \sim N(\mu, 9)$

- a. l'ipotesi  $H: \mu=15$  è semplice perché specifica completamente la distribuzione della v.c. X;
- b. l'ipotesi  $H: \mu > 15$  è composta.

## *Prima Fase.*

Dato un modello parametrico  $\mathbf{M}=\{ \mathbf{X} , \mathbf{P} \}$ , sia  $\Theta_0$  un sottoinsieme dello spazio parametrico  $\Theta$ . Si vuole **verificare**

$H_0 : \theta \in \Theta_0$       Ipotesi NULLA

contro

$H_1 : \theta \in \Theta_1$       Ipotesi ALTERNATIVA

dove  $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$     e     $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \phi$

L'ipotesi statistica riguardante la v.c.  $X$  e, quindi, il parametro  $\theta$ , implica una bipartizione dello spazio parametrico  $\Theta$  in due regioni,  $\Theta_0$  e  $\Theta_1$ , di cui una rappresenta l'ipotesi nulla  $H_0$  e la complementare rappresenta l'alternativa  $H_1$ .

**Seconda Fase:** consiste nell'estrazione dallo spazio campionario del campione  $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)$ .

**Terza Fase** (prendere una decisione su H):  
viene condotta sullo spazio campionario.

Più precisamente, si suddivide lo spazio campionario in due regioni,  $C_0$  e  $C_1$  tali che

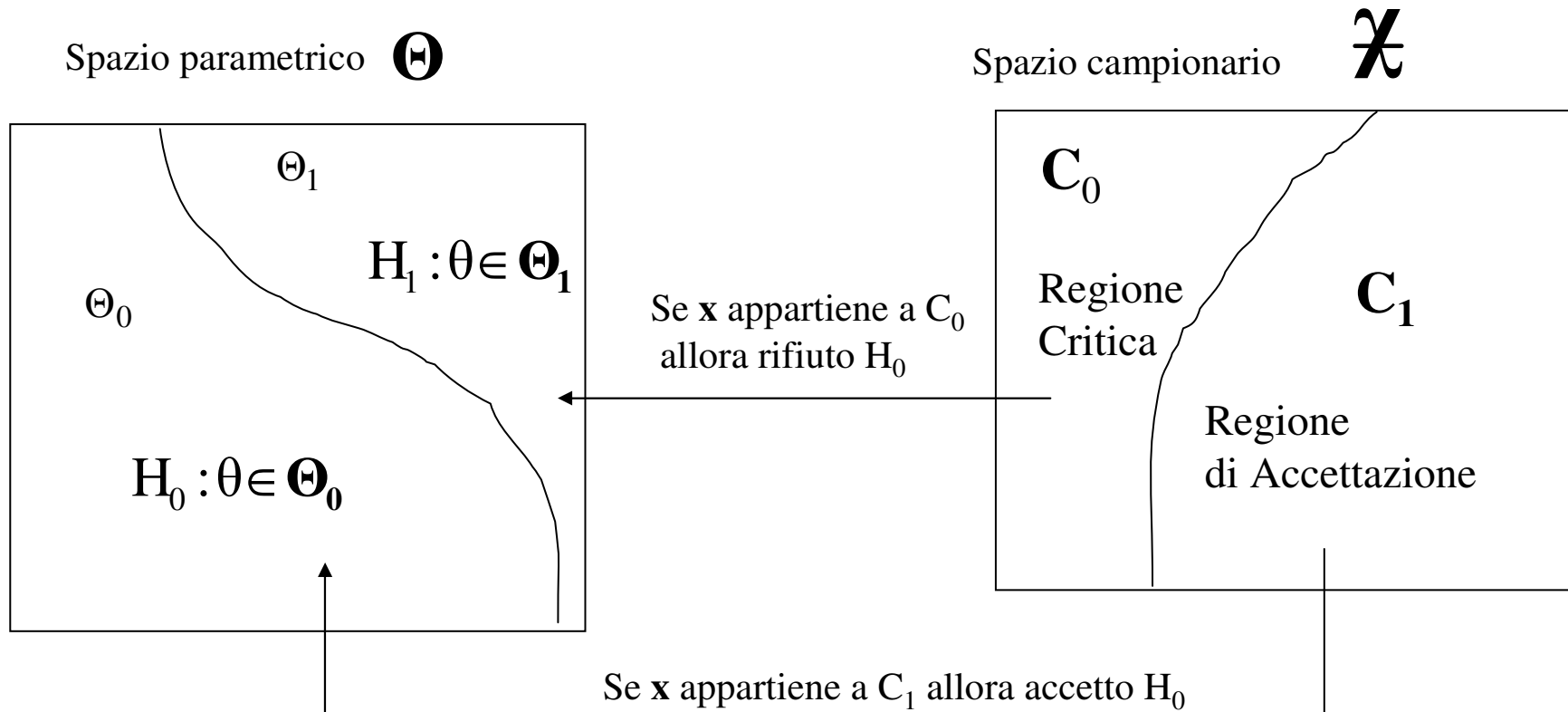
$$C_0 \cup C_1 = \mathcal{X} \quad \text{e} \quad C_0 \cap C_1 = \phi$$

Se  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in C_1$  Allora si **accetta**  $H_0$

Se  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in C_0$  Allora si **rifiuta**  $H_0$

Definizione. Sia  $C_0$  quel sottoinsieme dello spazio campionario che in accordo con un prefissato test, conduce al rifiuto dell'ipotesi  $H_0$ , se il campione osservato  $\mathbf{x}$  appartiene a  $C_0$ . Allora  $C_0$  è detta **regione critica** ( o di rifiuto) del test.

In sintesi, le fasi di un test possono essere così rappresentate:



Da ciò deriva che la **regola di decisione** se accettare o rifiutare  $H_0$  è una bipartizione dello spazio campionario.

Possiamo concludere affermando che:  
il test è una corrispondenza tra lo spazio campionario e lo spazio parametrico, dove il primo è suddiviso in due regioni ( $C_0$  e  $C_1$ ) secondo la regola di decisione ( è il fulcro del test ), mentre lo spazio parametrico è diviso in due regioni ( $\Theta_0$  e  $\Theta_1$ ) a seconda delle ipotesi da verificare.

Naturalmente, la corrispondenza tra  $\mathcal{X}$  e  $\Theta$  ha senso solo se valutata in termini probabilistici. Quindi, dobbiamo chiederci qual è la probabilità che il campione appartenga, ad esempio, alla regione critica, cioè:

$$P\{X \in C_0 / H_i\}$$

$i=0,1$ , la quale può essere calcolata assumendo vera una delle ipotesi.



In tale contesto, si possono avere quattro situazioni possibili, ottenute dalla combinazione dei due “**stati di natura**” ( $H_0$  vera,  $H_0$  falsa) con le due “**azioni possibili**” (accetto  $H_0$ , rifiuto  $H_0$ ), cioè

### STATI di NATURA

		Vera $H_0$	Falsa $H_0$
AZIONI POSSIBILI	Accetto $H_0$	$G_1$	$E_2$
	Rifiuto $H_0$	$E_1$	$G_2$

Descrizione degli eventi:

$G_1$ : in base al campione decido di accettare  $H_0$  e  $H_0$  è vera;

$G_2$ : in base al campione decido di rifiutare  $H_0$  e  $H_0$  è falsa;

$E_1$ : in base al campione decido di rifiutare  $H_0$  e  $H_0$  è vera;

$E_2$ : in base al campione decido di accettare  $H_0$  e  $H_0$  è falsa;

Probabilità degli eventi:

$$P_r\{G_1\} = P_r\{\text{Accetto } H_0 / H_0 \text{ è vera}\} = P_r\{\mathbf{X} \notin C_0 / H_0\} = 1 - \alpha$$

$$P_r\{G_2\} = P_r\{\text{Rifiuto } H_0 / H_0 \text{ è falsa}\} = P_r\{\mathbf{X} \in C_0 / H_1\} = 1 - \beta$$

$$P_r\{E_1\} = P_r\{\text{Rifiuto } H_0 / H_0 \text{ è vera}\} = P_r\{\mathbf{X} \in C_0 / H_0\} = \alpha$$

$$P_r\{E_2\} = P_r\{\text{Accetto } H_0 / H_0 \text{ è falsa}\} = P_r\{\mathbf{X} \notin C_0 / H_1\} = \beta$$

Spesso  $E_1$  viene definito come errore di primo tipo ed  $E_2$  errore di secondo tipo.

Concludendo si ha:

### STATI di NATURA

		Vera $H_0$	Falsa $H_0$
AZIONI POSSIBILI	$\mathbf{x} \notin C_0$	$1-\alpha$	$\beta$
	$\mathbf{x} \in C_0$	$\alpha$	$1-\beta$

## **Definizione.** Funzione di Potenza.

La funzione di potenza di un test di un'ipotesi statistica  $H_0$  contro un'ipotesi alternativa  $H_1$ , è quella funzione, definita per tutte le distribuzioni sotto considerazione (le ipotesi), che fornisce la probabilità che il campione cada nella regione critica  $C_0$  del test, cioè una funzione che fornisce la probabilità di rifiutare l'ipotesi sotto considerazione.

Il valore della funzione di potenza in corrispondenza di un punto dello spazio parametrico è detta potenza del test.

Formalizzando abbiamo:

$$K(\theta) = P\{\mathbf{X} \in C_0 / H_i\}$$

**Definizione.** Livello di significatività.

Il livello di significatività del test (o ampiezza della regione critica  $C_0$ ) è il valore massimo della funzione di potenza del test quando  $H_0$  è vera. Cioè:

$$K(\theta_0) = P\{\mathbf{X} \in C_0 / H_0\} = \alpha$$

Se  $H_0$  è definita come :  $H_0: \theta = \theta_0$

$$K(\theta) = \sup_{\theta \in \Theta_0} P\{\mathbf{X} \in C_0 / H_0\}$$

Se  $H_0$  è definita come :  $H_0: \theta \in \Theta_0$

Si può osservare che l'ipotesi  $H_0$  riflette, in generale, la situazione precedente all'esperimento campionario, nel senso che accettando  $H_0$  la situazione non cambia.

E' dal rifiuto di  $H_0$  che bisogna cautelarsi in quanto tale rifiuto implica una modifica delle condizioni e delle acquisizioni ritenute valide in precedenza, il che implica per lo più costi, rischi, modifiche tecniche, nuove procedure operative, ...ecc..

In tal modo si ritiene **preferibile** commettere un errore non modificando la realtà (errore di secondo tipo) piuttosto che correre il rischio di errare modificando la realtà (errore di primo tipo).

**Esempio.** In un giudizio penale, l'imputato è innocente fino a prova contraria.

E' fondamentale che per il giudice sia  $H_0$  l'ipotesi che egli sia innocente. Secondo questa logica si ritiene ben più grave condannare un innocente (errore di I tipo) che assolvere un colpevole (errore di II tipo).

Nel tentativo di definire un “buon” test, la ricerca va orientata verso il contenimento probabilistico degli errori, dando maggiore rilevanza all’errore di I tipo, senza ovviamente trascurare quello di II tipo.

Un metodo per definire un test ottimale consiste nel fissare l’ampiezza d’errore di I tipo e minimizzare l’ampiezza d’errore di II tipo.

## Regione critica migliore di ampiezza $\alpha$

**Definizione.** Sia  $C_0$  un sottoinsieme dello spazio campionario  $\mathcal{X}$ .

Allora  $C_0$  è detta regione critica migliore di ampiezza  $\alpha$ , per verificare l'ipotesi semplice  $H_0:\theta = \theta_0$  contro l'ipotesi semplice  $H_1:\theta = \theta_1$

se, per ogni sottoinsieme  $A$  dello spazio campionario per il quale

$$P\{\mathbf{X} \in A / H_0\} = \alpha$$

Si ha:

$$\text{i) } P\{\mathbf{X} \in C_0 / H_0\} = \alpha$$

$$\text{ii) } P\{\mathbf{X} \in C_0 / H_1\} \geq P\{\mathbf{X} \in A / H_1\}$$



In altri termini  $C_0$  è la regione critica migliore di ampiezza  $\alpha$  se tra tutte le altre regioni critiche della stessa ampiezza, possiede potenza maggiore o uguale rispetto a tutte le altre regioni critiche.

Il test basato su una regione critica migliore è chiamato test più potente.

**Teorema.** (di Neyman e Pearson).

Sia  $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_n)$  un c.c. iid estratto da  $f(\mathbf{x};\theta)$ . Sia  $L(\theta;\mathbf{x})$  la funzione di verosimiglianza di  $\mathbf{x}$ . Siano  $\theta_1$  e  $\theta_2$  due valori fissati e distinti di  $\theta$  tali che  $\Theta=\{\theta: \theta= \theta_1 \text{ oppure } \theta= \theta_2\}$ ; sia, infine,  $k$  un numero positivo.

Se  $C_0$  è un sottoinsieme dello spazio campionario tale che:

$$\text{i) } \frac{L(\theta_1; \mathbf{x})}{L(\theta_2; \mathbf{x})} \leq k \quad \forall \mathbf{x} \in C_0$$

$$\text{ii) } \frac{L(\theta_1; \mathbf{x})}{L(\theta_2; \mathbf{x})} \geq k \quad \forall \mathbf{x} \in \bar{C}_0$$

$$\text{iii) } P\{\mathbf{X} \in C_0 / H_0\} = \alpha$$

**Allora**  $C_0$  è una regione critica migliore di ampiezza  $\alpha$  per verificare l'ipotesi  $H_0:\theta= \theta_1$  contro l'ipotesi  $H_1: \theta= \theta_2$ .

# **Dimostrazione.**

Non sempre bisogna individuare  $C_0$  e  $k$  che soddisfano le condizioni poste dal teorema. Spesso si riesce a trasformare la disuguaglianza (i) in una disuguaglianza che riguarda una particolare statistica.

**Esempio.**

## Test del Rapporto di Verosimiglianza Generalizzato

Sia  $(X_1, \dots, X_n)$  un c.c. iid estratto da  $f(x; \theta)$ .

Supponiamo di voler effettuare il seguente test:

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \text{contro} \quad H_1 : \theta \in \Theta_1$$

$$\text{dove } \Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta \quad \text{e} \quad \Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$$

**Definizione.** Rapporto di verosimiglianza Generalizzato.

Sia  $L(\theta; \mathbf{x})$  la funzione di verosimiglianza di un campione  $\mathbf{x}$ . Si definisce rapporto di verosimiglianza generalizzato la quantità:

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(\theta; \mathbf{x})}{\sup_{\theta \in \Theta} L(\theta; \mathbf{x})}$$

Osservazioni:

1.  $\Lambda(\mathbf{x})$  è una funzione del campione osservato  $\mathbf{x}$ .  
Sostituendo a  $\mathbf{x}$  il c.c.  $\mathbf{X}$  otteniamo  $\Lambda(\mathbf{X})$  che è una statistica in quanto non dipende dai valori del parametro  $\theta$ .
2. I valori di  $\Lambda(\mathbf{x})$  appartengono all'intervallo  $[0,1]$ .
3. I valori della statistica  $\Lambda(\mathbf{X})$  sono usati per il seguente test:

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \text{contro} \quad H_1 : \theta \in \Theta_1$$

Tramite il rapporto di verosimiglianza si stabilisce che:

$$\text{si rifiuta } H_0 \iff \Lambda(\mathbf{x}) \leq \lambda_0$$

dove  $\lambda_0$  è una costante determinata dal livello di significatività  $\alpha$  del test.

Il test del rapporto di verosimiglianza generalizzato ha senso anche intuitivamente in quanto  $\Lambda(\mathbf{x})$  tende ad essere piccolo quando  $H_0$  non è vera, dato che il denominatore tende ad essere maggiore del numeratore.

Per un livello di significatività  $\alpha$  fissato il corrispondente valore di  $\lambda_0$  tale che

$$P_r \{ \Lambda(\mathbf{X}) \leq \lambda_0 / H_0 \} = \alpha$$

può essere determinato in modo esatto solo se è nota la distribuzione campionaria della statistica  $\Lambda(\mathbf{X})$ , in altri casi è necessario far riferimento ad approssimazioni per grandi campioni.



**Esempio.**

**Teorema.** Sia  $X_1, X_2, \dots$  una successione di v.c. iid estratta da  $f(x; \theta)$ .

Consideriamo il test

$H_0: \theta = \theta_0$  contro  $H_1: \theta \neq \theta_0$

Assumiamo che la sequenza delle radici dell'equazione di verosimiglianza siano consistenti e che siano vere le condizioni di regolarità per la normalità asintotica degli stimatori di massima verosimiglianza.

Allora, sotto  $H_0$

$$-2 \ln \{ \Lambda_n(\mathbf{X}) \} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \chi^2(1)$$

---

E' evidente che si rifiuta  $H_0$  se  $-2 \ln \{ \Lambda(\mathbf{x}) \}$  è elevato. In particolare, fissato  $\alpha$ , se

$$-2 \ln \{ \Lambda(\mathbf{x}) \} \geq \chi_{\alpha}^2(1) \Rightarrow \text{rifiuto } H_0$$

**Teorema.** Sia  $X_1, X_2, \dots$  una successione di v.c. iid estratta da  $f(x; \theta)$

e sia  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k) \in \Theta \subseteq \mathcal{R}^k$

Consideriamo il test

$$H_0 : \theta_1 = \theta_1^0, \theta_2 = \theta_2^0, \dots, \theta_r = \theta_r^0, \theta_{r+1}, \dots, \theta_k$$

$$H_1 : \theta_1 \neq \theta_1^0, \theta_2 \neq \theta_2^0, \dots, \theta_r \neq \theta_r^0$$

dove

$\theta_1^0, \theta_2^0, \dots, \theta_r^0$  sono valori noti

$\theta_{r+1}, \dots, \theta_k$  non sono specificati

Se sono soddisfatte alcune condizioni di regolarità,  
allora, sotto  $H_0$

$$-2 \ln \{ \Lambda_n(\mathbf{X}) \} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \chi^2(r)$$

## Test di Significatività

- a) Individuare una statistica (test) che si comporta in modo diverso sotto le due ipotesi  $H_0$  e  $H_1$ ;
- b) utilizzare il diverso comportamento della statistica per definire il test.

**Esempio.** Dato un c.c. di dimensione 20 estratto da un v.c.  $N(\mu, 1)$ , si vuole verificare se

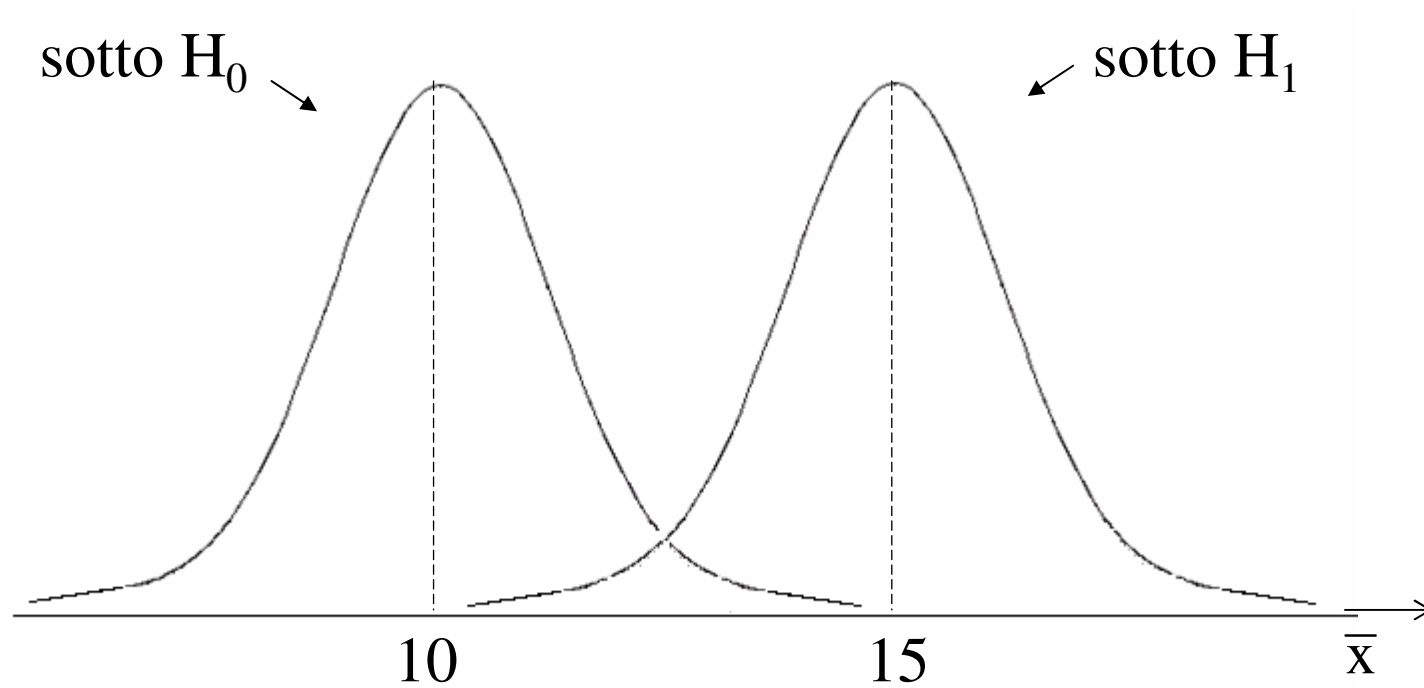
$$H_0: \mu=10 \quad \text{contro} \quad H_1: \mu=15$$

Consideriamo la STATISTICA TEST media campionaria; sappiamo che:

$$\text{sotto } H_0 \quad \bar{X} \sim N\left(10, \frac{1}{20}\right)$$

$$\text{sotto } H_1 \quad \bar{X} \sim N\left(15, \frac{1}{20}\right)$$

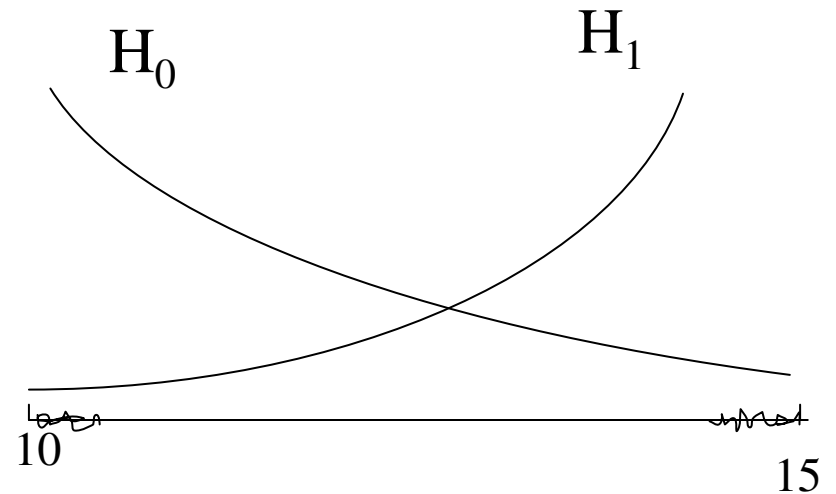
Graficamente si ha:



1. Osservato il valore della  
media campionaria

se  $\bar{x}$  è "vicino" a 15  $\Rightarrow$  rif.  $H_0$

se  $\bar{x}$  è "vicino" a 10  $\Rightarrow$  acc.  $H_0$



2. Possibili eventi tra 10 e 15 sono:

$G_1$ : accetto  $H_0$  e  $H_0$  è vera;

$G_2$ : rifiuto  $H_0$  e  $H_0$  è falsa;

$E_1$ : rifiuto  $H_0$  e  $H_0$  è vera;

$E_2$ : accetto  $H_0$  e  $H_0$  è falsa.

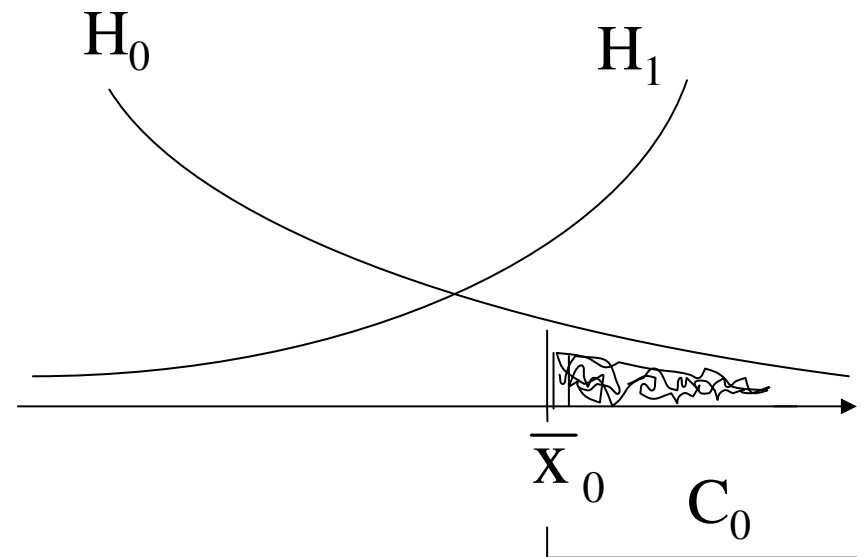
3. Problema: costruire una regione (critica)  $C_0$  tale che:

$$\text{se } \bar{x} \in C_0 \Rightarrow \text{rifiuto } H_0$$

significa individuare, con qualche criterio, un punto (detto punto critico) tra 10 e 15 in modo tale che:

$$\text{se } \bar{x} \geq \bar{x}_0 \Rightarrow \bar{x} \in C_0$$

$$\text{se } \bar{x} < \bar{x}_0 \Rightarrow \bar{x} \notin C_0$$



Fissato  $\alpha$ , sappiamo che  $\alpha = P_r \{ \mathbf{X} \in C_0 / H_0 \}$

Nel caso dell'esempio, fissato  $\alpha$ , si ha:

$$\begin{aligned} \alpha &= P_r \{ \bar{X} \geq \bar{x}_0 / H_0 \} = 1 - P_r \{ \bar{X} < \bar{x}_0 / H_0 \} = \\ &= 1 - P_r \left\{ \frac{\bar{X} - 10}{1/\sqrt{20}} < \frac{\bar{x}_0 - 10}{1/\sqrt{20}} \right\} = 1 - \Phi \left( \frac{\bar{x}_0 - 10}{1/\sqrt{20}} \right) = 1 - \Phi(z_0) \end{aligned}$$

dove

$$z_0 = \frac{\bar{x}_0 - 10}{1/\sqrt{20}}$$

Si individua dalle tavole della  $N(0,1)$



Il punto critico è dato da:

$$\bar{x}_0 = 10 + \frac{z_0}{\sqrt{20}}$$

E' il confine tra la Regione Critica e la Regione di Accettazione.

## Fasi per la costruzione di un Test di Significatività:

1. Si formulano le ipotesi;
2. Si individua la statistica test;
3. Si fissa il livello di significatività;
4. Si determinano i punti critici;
5. Si costruisce la regione critica;
6. Si estrae il campione e si verifica se il valore della statistica test appartiene oppure non appartiene alla regione critica;
7. Si decide se accettare o rifiutare l'ipotesi nulla.

## TEST sui parametri di una v.c. NORMALE

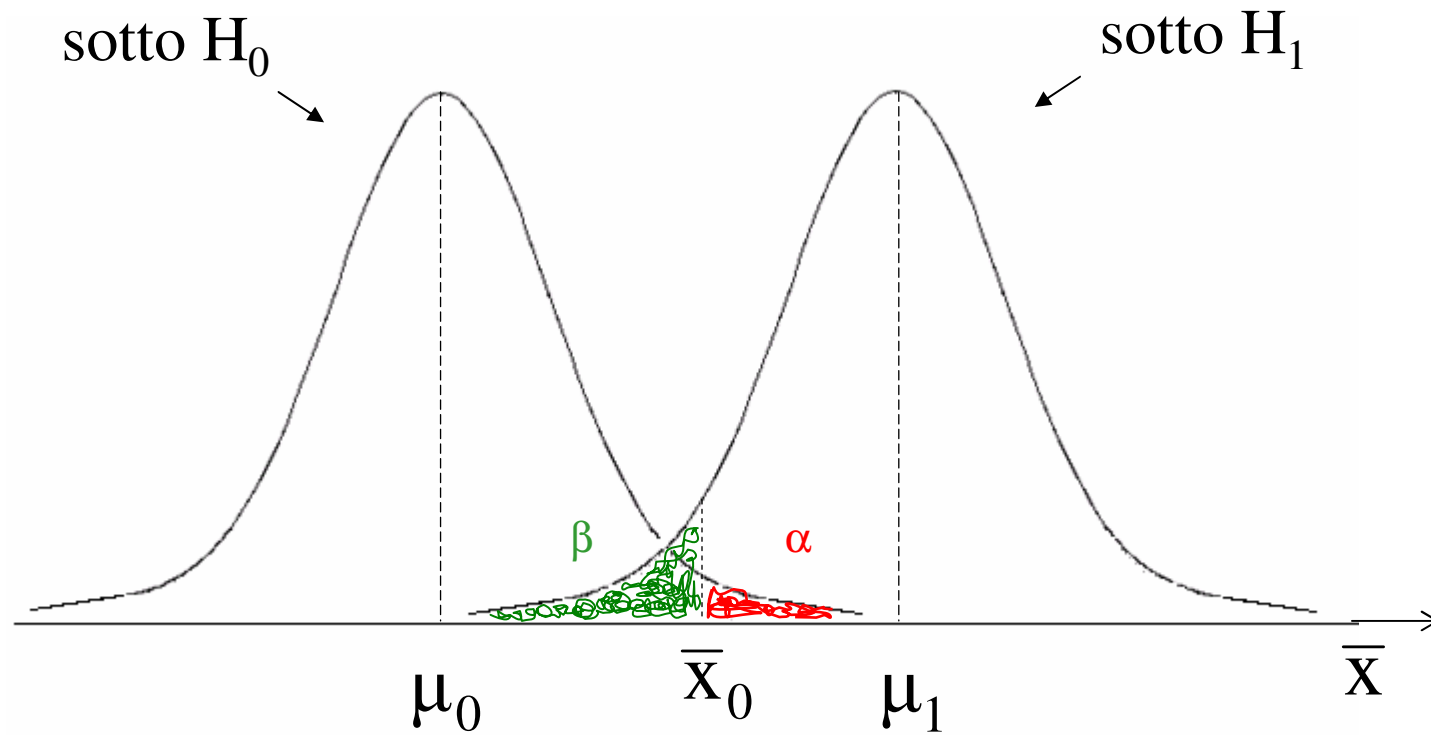
Dato un c.c. iid di dimensione  $n$ , estratto da un v.c.  $N(\mu, \sigma_0^2)$ ,  
si vuole verificare se

$$H_0: \mu = \mu_0 \quad \text{contro} \quad H_1: \mu = \mu_1 \quad \text{con} \quad \mu_0 < \mu_1$$

La STATISTICA TEST media campionaria è tale che

$$\text{sotto } H_0 \quad \bar{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma_0^2}{n}\right)$$

$$\text{sotto } H_1 \quad \bar{X} \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma_0^2}{n}\right)$$



Fissato  $\alpha$ , determiniamo il punto critico

$$\begin{aligned}\alpha &= P_r \left\{ \bar{X} \geq \bar{x}_0 / H_0 \right\} = 1 - P_r \left\{ \bar{X} < \bar{x}_0 / H_0 \right\} = \\ &= 1 - P_r \left\{ \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} < \frac{\bar{x}_0 - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \right\} = 1 - \Phi \left( \frac{\bar{x}_0 - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \right) = 1 - \Phi(z_\alpha)\end{aligned}$$

dove

$$z_\alpha = \frac{\bar{x}_0 - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}}$$

si individua dalle tavole della  $N(0,1)$

Da quest'ultima il punto critico risulta essere:

$$\bar{x}_0 = \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

E, quindi, la regione critica è:

$$C_0 = \{ \bar{x} : \bar{x} > \bar{x}_0 \} = \left\{ \bar{x} : \bar{x} > \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \right\}$$

Osservato il campione, si calcola la media campionaria

se  $\bar{x} > \bar{x}_0 \quad \Rightarrow \quad$  rifiuto  $H_0$

se  $\bar{x} \leq \bar{x}_0 \quad \Rightarrow \quad$  accetto  $H_0$

Calcolo della probabilità d'errore di II tipo:

$$\begin{aligned}\beta &= P_r \{ \bar{X} \notin C_0 / H_1 \} = P_r \{ \bar{X} < \bar{x}_0 / H_1 \} = \\ &= P_r \left\{ \frac{\bar{X} - \mu_1}{\sigma_0 / \sqrt{n}} < \frac{\bar{x}_0 - \mu_1}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \right\} = P_r \{ Z < z_\beta \} = \Phi(z_\beta)\end{aligned}$$

Dato che  $\mu_1$  e  $\sigma_0$  sono per ipotesi noti

$\bar{x}_0$  è stato calcolato in precedenza

allora  $z_\beta$  è noto, quindi, dalle tavole possiamo calcolare  $\beta$ .

Calcolo della potenza del test:

$$\begin{aligned} K &= 1 - \beta = P_r \{ \text{rifiutare } H_0 / H_0 \text{ è falsa} \} = \\ &= P_r \{ \bar{X} > \bar{x}_0 / H_1 \} = P_r \left\{ \frac{\bar{X} - \mu_1}{\sigma_0 / \sqrt{n}} > \frac{\bar{x}_0 - \mu_1}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \right\} = \\ &= P_r \{ Z > z_\beta \} = 1 - \Phi(z_\beta) \end{aligned}$$

dove

$$z_\beta = \frac{\bar{x}_0 - \mu_1}{\sigma_0 / \sqrt{n}}$$



- Si evidenzia che i due errore,  $\alpha$  e  $\beta$ , sono legati da una relazione inversa:
- al diminuire di  $\alpha$ , il punto critico si sposta a destra e, quindi,  $\beta$  aumenta;
  - al diminuire di  $\beta$ , il punto critico si sposta a sinistra e, quindi,  $\alpha$  aumenta

Per diminuire contemporaneamente i due errori, bisogna aumentare la dimensione campionaria; infatti abbiamo:

$$\alpha = P_r \{ \bar{X} \geq \bar{x}_0 / H_0 \} = 1 - \Phi \left( \frac{\bar{x}_0 - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \right) = 1 - \Phi(z_\alpha)$$

$$\text{dove } z_\alpha = \frac{\bar{x}_0 - \mu_0}{\sigma_0} \sqrt{n}$$

Dato che il punto critico è maggiore di  $\mu_0$ , all'aumentare di  $n$ ,  $z_\alpha$  aumenta e, quindi,  $\Phi(z_\alpha)$  aumenta. Di conseguenza,  $\alpha$  diminuisce.

Al contrario, per l'errore di secondo tipo, si ha:

$$\beta = P_r \{ \bar{X} < \bar{x}_0 / H_1 \} = P_r \left\{ \frac{\bar{X} - \mu_1}{\sigma_0 / \sqrt{n}} < \frac{\bar{x}_0 - \mu_1}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \right\} = \Phi(z_\beta)$$

dove

$$z_\beta = \frac{\bar{x}_0 - \mu_1}{\sigma_0} \sqrt{n}$$

Dato che il punto critico è minore di  $\mu_1$ ,  
all'aumentare di  $n$ ,  $z_\beta$  diminuisce e, quindi,  $\Phi(z_\beta) = \beta$  diminuisce.

## TEST sulla media di una v.c. NORMALE

Dato un c.c. iid di dimensione  $n$ , estratto da un v.c.  $N(\mu, \sigma^2_0)$ ,  
si vuole verificare se

$H_0: \mu = \mu_0$  contro  $H_1: \mu \neq \mu_0$  Alternativa **BILATERALE**

La STATISTICA TEST media campionaria è tale che

$$\text{sotto } H_0 \quad \bar{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma_0^2}{n}\right)$$

Intuitivamente rifiutiamo  $H_0$  per valori della media campionaria molto più grandi di  $\mu_0$  oppure molto più piccoli di  $\mu_0$ .

In questo caso si individuano due punti critici  $\bar{X}_s$  e  $\bar{X}_d$

tali che **rifiutiamo**  $H_0$

se  $\bar{x} \leq \bar{x}_s$  oppure se  $\bar{x} \geq \bar{x}_d$

Determinazione dei punti critici.

Fissato l'errore di I tipo, ripartiamo  $\alpha$  sulle code in modo tale che:

$$\frac{\alpha}{2} = P_r \left\{ \bar{X} \leq \bar{x}_s / H_0 \right\} = P_r \left\{ \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \leq \frac{\bar{x}_s - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \right\} = \Phi \left( z_{\frac{\alpha}{2}}^s \right)$$

$$\frac{\alpha}{2} = P_r \left\{ \bar{X} \geq \bar{x}_d / H_0 \right\} = P_r \left\{ \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \geq \frac{\bar{x}_d - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \right\} = 1 - \Phi \left( z_{\frac{\alpha}{2}}^d \right)$$

Dalle tavole della  $N(0,1)$ , calcoliamo  $z_{\frac{\alpha}{2}}^s = -z_{\frac{\alpha}{2}}$  e  $z_{\frac{\alpha}{2}}^d = z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$\bar{x}_s = \mu_0 - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \qquad \bar{x}_d = \mu_0 + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

Regione di rifiuto è data da

$$\begin{aligned} C_0(\alpha) &= \{ \bar{X} : \bar{X} \leq \bar{X}_s, \bar{X} \geq \bar{X}_d \} = \\ &= \left\{ \bar{X} : \bar{X} \leq \mu_0 - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \bar{X} \geq \mu_0 + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \right\} \end{aligned}$$

La regione critica può essere espressa anche nel seguente modo:

$$C_0(\alpha) = \left\{ z_c : z_c \leq -z_{\frac{\alpha}{2}}, z_c \geq z_{\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

dove

$$z_c = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0} \sqrt{n}$$

La funzione di potenza del test dipende da  $\mu$

$$\begin{aligned}
 k(\mu) &= P_r \left\{ \bar{X} \in C_0(\alpha) / H_i \right\} = P_r \left[ \left\{ \bar{X} < \bar{x}_s \right\} \cup \left\{ \bar{X} > \bar{x}_d \right\} / H_i \right] = \\
 &= P_r \left\{ \bar{X} < \bar{x}_s / H_i \right\} + P_r \left\{ \bar{X} > \bar{x}_d / H_i \right\} = \\
 &= P_r \left\{ \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_0 / \sqrt{n}} < \frac{\bar{x}_s - \mu}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \right\} + P_r \left\{ \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_0 / \sqrt{n}} > \frac{\bar{x}_d - \mu}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \right\} = \\
 &= P_r \left\{ Z < \frac{\bar{x}_s - \mu}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \right\} + P_r \left\{ Z > \frac{\bar{x}_d - \mu}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \right\} = \\
 &= \Phi \left\{ \frac{\bar{x}_s - \mu}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \right\} + 1 - \Phi \left\{ \frac{\bar{x}_d - \mu}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \right\}
 \end{aligned}$$



## Esempio

La degenza ospedaliera per il trattamento di una certa malattia per i pazienti della classe di età 20-40 si distribuisce normalmente con media incognita e deviazione standard pari a 2.1.

Posto  $\alpha=0.01$  e  $n=30$ , determinare:

- a. la zona di rifiuto del test  $H_0:\mu=7$  contro  $H_1:\mu>7$
- b. la potenza del test di cui al punto precedente per  $\mu=7.6; 8.5; 9$ .

## TEST sulla media di una v.c. NORMALE

Dato un c.c. iid di dimensione  $n$ , estratto da un v.c.  $N(\mu, \sigma^2)$ , con varianza sconosciuta, si vuole verificare se

$H_0: \mu = \mu_0$  contro  $H_1: \mu \neq \mu_0$  Alternativa **BILATERALE**

La STATISTICA TEST media campionaria è tale che

$$\text{sotto } H_0 \quad \bar{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Dato che la varianza è sconosciuta, la media campionaria non può essere utilizzata come statistica-test.

Sotto  $H_0$

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

Fissato  $\alpha$ , ripartendo l'errore di primo tipo sulle code, si ha:

$$\frac{\alpha}{2} = P_r \left\{ \bar{X} \leq \bar{x}_s / H_0 \right\} = P_r \left\{ \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \leq \frac{\bar{x}_s - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \right\} = P_r \left\{ T \leq t_{\frac{\alpha}{2}}^{(s)} \right\}$$

$$\frac{\alpha}{2} = P_r \left\{ \bar{X} \geq \bar{x}_d / H_0 \right\} = P_r \left\{ \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \geq \frac{\bar{x}_d - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \right\} = P_r \left\{ T \geq t_{\frac{\alpha}{2}}^{(d)} \right\}$$

dove

$$t_{\frac{\alpha}{2}}^{(s)} = \frac{\bar{X}_s - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \qquad t_{\frac{\alpha}{2}}^{(d)} = \frac{\bar{X}_d - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Dalle tavole della t-Student si evince che

$$t_{\frac{\alpha}{2}}^{(s)} = -t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \qquad t_{\frac{\alpha}{2}}^{(d)} = t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

I punti critici risultano:

$$\bar{X}_s = \mu_0 - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad \bar{X}_d = \mu_0 + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}$$

In definitiva la regione critica risulta essere:

$$\begin{aligned} C_0(\alpha) &= \{ \bar{X} : \bar{X} \leq \bar{X}_s, \bar{X} \geq \bar{X}_d \} = \\ &= \left\{ \bar{X} : \bar{X} \leq \mu_0 - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{X} \geq \mu_0 + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}} \right\} \end{aligned}$$

La regione critica può essere espressa anche nel seguente modo:

$$C_0(\alpha) = \left\{ t_c : t_c \leq -t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), t_c \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right\}$$

dove

$$t_c = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Estratto il campione  $\mathbf{x}=(x_1, \dots, x_n)$ , si calcola la media campionaria e la varianza campionaria e si verifica se :

$$t_c \in C_0(\alpha) \Rightarrow \text{si rifiuta } H_0$$

## **Esempio.**

Una grande catena nazionale di punti vendita di articoli per la casa effettua una svendita di fine stagione di tosaerba. Il numero di tosaerba vendute durante questa liquidazione, in un campione di dieci negozi, è il seguente:

8, 11, 0, 4, 7, 8, 10, 5, 8, 3.

Vi sono elementi per sostenere, ad un livello di significatività di 0.05, che durante questa svendita in media siano state svendute più di 5 tosaerba per negozio ? Assumete che il numero di tosaerba sia normalmente distribuito.

**Dualità** tra Intervalli di Confidenza al  $100(1-\alpha)\%$   
e Test di Significatività al livello  $\alpha$ .

Dato un c.c. iid di dimensione  $n$ , estratto da un v.c.  $N(\mu, \sigma^2_0)$ , con  
varianza nota, si vuole verificare se

$$H_0: \mu = \mu_0 \quad \text{contro} \quad H_1: \mu \neq \mu_0 \quad \text{Alternativa } \mathbf{BILATERALE}$$

Regione critica

$$C_0(\alpha) = \left\{ \bar{x} : \bar{x} \leq \mu_0 - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} , \bar{x} \geq \mu_0 + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \right\}$$

Regione di Accettazione

$$A = \left\{ \bar{x} : \mu_0 - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} \leq \mu_0 + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \right\}$$



L'Intervallo di confidenza per  $\mu$  è:

$$\text{I.C.} = \left\{ \bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} , \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \right\}$$

Se  $H_0: \mu = \mu_0$  e  $\mu_0$  appartiene all'I.C. allora accettiamo  $H_0$ ; infatti, si ha:

$$\begin{aligned} \mu_0 \in \text{I.C.} &\Rightarrow \left\{ \bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} < \mu_0 < \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \right\} = \\ &= \left\{ \mu_0 - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} < \bar{X} < \mu_0 + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \bar{X} \notin C_0(\alpha) \Rightarrow \text{accetto } H_0 \end{aligned}$$

Vale il viceversa.

## TEST sulla varianza di una v.c. NORMALE

Dato un c.c. iid di dimensione  $n$ , estratto da un v.c.  $N(\mu, \sigma^2)$ , con media e varianza sconosciute, si vuole verificare se

$H_0: \sigma = \sigma_0$  contro  $H_1: \sigma > \sigma_0$  Alternativa **UNILATERALE**

In tale contesto, sotto  $H_0$  sappiamo che

$$V = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

Fissato  $\alpha$ , la regione critica è:

$$C_0(\alpha) = \{V_c : V_c > \chi_{\alpha}^2(n-1)\}$$

dove

$$V_c = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

e

$$\alpha = P_r \left\{ V > \chi_{\alpha}^2(n-1) \right\}$$

### **Esempio.**

Si consideri una popolazione statistica adattata da una v.v. Normale con media e varianza incognite. Si estrae un c.c. di numerosità  $n=16$

E si determina il valore della varianza campionaria,  $s^2=25$ .

Si sottoponga a test unilaterale l'ipotesi nulla che la varianza della popolazione sia pari a 23 ad un livello di significatività dell'1%.

## TEST sulla differenza tra le medie di due v.c. NORMALI

Siano  $X$  ed  $Y$  due v.c. indipendenti e normalmente distribuite, cioè

$$\begin{array}{ccc} X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2) & \perp & Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{X}_{(m \times 1)} & \perp & \mathbf{Y}_{(n \times 1)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{X} \sim N\left(\mu_x, \frac{\sigma_x^2}{m}\right) & \perp & \bar{Y} \sim N\left(\mu_y, \frac{\sigma_y^2}{n}\right) \end{array}$$

Posto  $\delta = \mu_x - \mu_y$  si vuole costruire il seguente test

$$H_0 : \delta = 0 \quad \text{contro} \quad H_0 : \delta \neq 0$$

Primo caso:  $\sigma_x^2$  e  $\sigma_y^2$  note

Stimatore naturale della differenza tra le medie  $D = \bar{X} - \bar{Y}$

Abbiamo visto che:

$$E(D) = \mu_x - \mu_y$$
$$V(D) = \frac{\sigma_x^2}{m} + \frac{\sigma_y^2}{n}$$

Sotto  $H_0$

$$D \sim N\left(0, \frac{\sigma_x^2}{m} + \frac{\sigma_y^2}{n}\right)$$

Rifiutiamo  $H_0$  se i valori di  $D$  sono molto diversi dallo zero.

Fissato  $\alpha$ , calcoliamo i punti critici:

$$\frac{\alpha}{2} = P_r \{D \leq d_s / H_0\} = P_r \left\{ \frac{D}{\sqrt{V(D)}} \leq \frac{d_s}{\sqrt{V(D)}} \right\} = P_r \{Z \leq z^{(s)}\}$$

$$\frac{\alpha}{2} = P_r \{D \geq d_d / H_0\} = P_r \left\{ \frac{D}{\sqrt{V(D)}} \geq \frac{d_d}{\sqrt{V(D)}} \right\} = P_r \{Z \geq z^{(d)}\}$$

dove

$$z^{(s)} = \frac{d_s}{\sqrt{V(D)}} = \frac{d_s}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{m} + \frac{\sigma_y^2}{n}}} \quad z^{(d)} = \frac{d_d}{\sqrt{V(D)}} = \frac{d_d}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{m} + \frac{\sigma_y^2}{n}}}$$



Dalle tavole della  $N(0,1)$ , si ha:

$$z^{(s)} = -z_{\frac{\alpha}{2}} \quad z^{(d)} = z_{\frac{\alpha}{2}}$$

Sostituendo otteniamo i punti critici:

$$d_s = -z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{m} + \frac{\sigma_y^2}{n}} \quad d_d = z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{m} + \frac{\sigma_y^2}{n}}$$

La regione critica è data da:

$$C_0(\alpha) = \{d : d \leq d_s, d \geq d_d\}$$

con  $d = \bar{x} - \bar{y}$

**Secondo caso:** varianze sconosciute ma uguali  $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$

Stimatore naturale della differenza tra le medie  $D = \bar{X} - \bar{Y}$

Si ha, inoltre, che

$$E(D) = \mu_x - \mu_y \quad V(D) = \frac{\sigma_x^2}{m} + \frac{\sigma_y^2}{n} = \sigma^2 \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right)$$

Sotto  $H_0$  la quantità

$$Z = \frac{D}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{m} + \frac{\sigma_y^2}{n}}} = \frac{D}{\sigma \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \sim N(0, 1)$$

**non** è una statistica – test perché  $\sigma$  è un parametro sconosciuto.

Per quanto detto nelle lezioni sugli Intervalli di confidenza, la quantità

$$T = \frac{D - (\mu_x - \mu_y)}{S_p \times \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \sim t(m + n - 2)$$

dove

$$S_p^2 = \frac{(m - 1)S_x^2 + (n - 1)S_y^2}{(m + n - 2)}$$

Sotto  $H_0$  la quantità

$$T = \frac{D}{S_p \times \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \sim t(m+n-2)$$

è una statistica -test per verificare le ipotesi

$$H_0 : \delta = 0$$

contro

$$H_0 : \delta \neq 0$$

con  $\delta = \mu_x - \mu_y$ .

Fissato  $\alpha$ , calcoliamo i punti critici:

$$\frac{\alpha}{2} = P_r\{D \leq d_s / H_0\} = P_r\left\{\frac{D}{S_p \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \leq \frac{d_s}{S_p \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}\right\} = P_r\{T \leq t^{(s)}\}$$

$$\frac{\alpha}{2} = P_r\{D \geq d_d / H_0\} = P_r\left\{\frac{D}{S_p \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \geq \frac{d_d}{S_p \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}\right\} = P_r\{T \geq t^{(d)}\}$$

dove

$$t^{(s)} = \frac{d_s}{S_p \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}$$

$$t^{(d)} = \frac{d_d}{S_p \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}$$

Dalle tavole della t-Student, si ha:

$$t^{(s)} = -t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2) \qquad t^{(d)} = t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)$$

Sostituendo otteniamo i punti critici:

$$d_s = -t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2) \times s_p \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$$

$$d_d = t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2) \times s_p \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$$

La regione critica è data da:

$$C_0(\alpha) = \{d : d \leq d_s, d \geq d_d\}$$

con  $d = \bar{x} - \bar{y}$

Esempio.

Per provare l'utilità terapeutica di due nuovi farmaci, A e B, un gruppo di ricercatori sperimenta entrambi su un gruppo casuale di 10 soggetti. I risultati sperimentali, misurati utilizzando un determinato indice, sono I seguenti:

farmaco A: 25, 46, 39, 60, 24, 23, 38, 42, 50, 46

farmaco B: 43, 29, 38, 51, 44, 28, 23, 20, 56, 55

Supponendo che l'utilità terapeutica possa essere adattata statisticamente da distribuzioni normali e che le varianze delle due popolazioni siano uguali, determinare un intervallo di confidenza per la differenza delle utilità terapeutiche medie dei due farmaci al livello di confidenza del 99%. Inoltre, stabilire se la differenza tra le utilità medie è significativamente diversa da zero.