Le Variabili Casuali

Corso di **Probabilità ed Inferenza**

a.a. 2009/2010 - Primo Periodo

Prof. Filippo DOMMA

Corso di Laurea Specialistica in

Economia Applicata

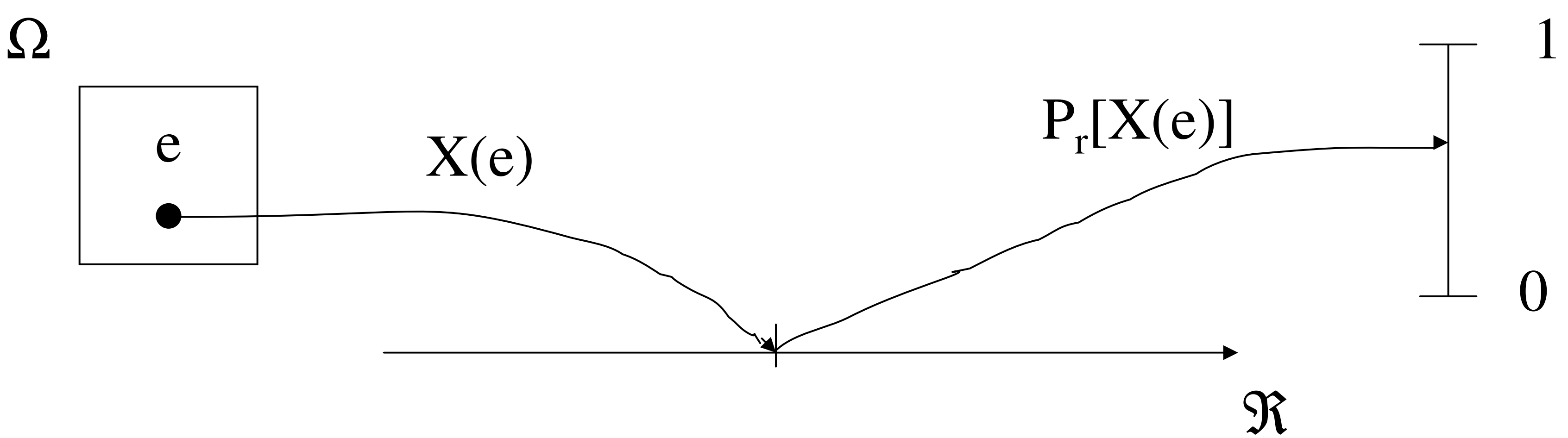
Facoltà di Economia – UniCal

Def.8. *Variabile Casuale*

Una variabile casuale X è una funzione che associa ad ogni evento dello spazio campionario Ω uno ed un solo numero reale secondo una funzione di probabilità.

$$X : \Omega \rightarrow \Re \qquad P_r[.] : \Re \rightarrow [0,1]$$

$$e \mapsto X(e) \qquad x \mapsto p(x)$$



Dunque, una v.c. è una regola (una funzione) che permette di assegnare un valore numerico ad ogni risultato dell'esperimento.

Dalla definizione è evidente che dato uno spazio campionario Ω è possibile costruire infinite v.c. (si osserva che tale funzione non deve essere necessariamente biunivoca).

Esercizio 17.

Costruire la v.c. X così definita:

"numero di teste nel lancio simultaneo di tre monete" .

Esercizio 18.

Costruire la v.c. Y così definita:

"numero di coppie consecutive di teste, nel lancio simultaneo di tre monete" .

Esercizio 19.

Nel lancio simultaneo di tre monete, supponiamo di associare 2 ad ogni testa e -1 ad ogni croce.

Costruire la v.c. W definita come "guadagno netto".

N.B.: le funzioni di probabilità $P_r[X(e)]$ e $P_r(e)$ sono funzioni diverse ma si può passare dall'una all'altra mediante trasformazione biunivoca.

Costruiamo una v.c. e le corrispondenti probabilità in due fasi:

1. Ad ogni evento di Ω si associa uno ed un solo numero reale X(e). Questa operazione definisce una v.c. X.

2. Ad ogni possibile valore di X(.) si associa una probabilità $P_r[X]$. Questa operazione definisce la distribuzione di probabilità della v.c. X.

Si osserva che mentre la regola da adottare è arbitraria in quanto dipende da ciò che vogliamo che la v.c. interpreti, lo stesso non è vero per la determinazione della distribuzione di probabilità $P_r[X]$ in quanto quest'ultima è legata alle probabilità degli eventi elementari $P_r[e]$.

Anziché specificare le singole P[X] si cercherà, ove possibile, di determinare la relazione funzionale che lega queste probabilità, sintetizzata in una funzione f(x). Ciò sarà necessario quando la v.c. X è di tipo continuo o discreto con un numero molto elevato di valori.

Posto che nel caso discreto P[X=x]=f(x), diamo la seguente

Def. 9.. *V.C. discrete*.

La v.c. X è una v.c. discreta se assume un numero finito o un'infinità numerabile di valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con probabilità rispettivamente $f(x_1)$, $f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$. Dove f(x) è detta **funzione di probabilità** (fp) e soddisfa le seguenti proprietà:

1. $$f(x_i) \geq 0$$ i=1,2,…,n,...

2. $$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$$

In alcuni casi, sarà necessario calcolare la probabilità che X assuma un valore minore o uguale a x_k, cioè

$$P_r\left[X \leq x_k\right] = F(x_k)$$

Questa funzione è detta **funzione di ripartizione** (f.r.) ed è uguale a:

$$F(x_k) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_k) = \sum_{x_i \leq x_k} f(x_i)$$

Proprietà della f.r. F(.):

1. $$F(-\infty) = 0$$

2. $$F(x_n) = F(+\infty) = 1$$

3. $$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(x_i)$$

4. F(x) è per convenzione continua da destra

$$\lim_{\varepsilon_n \to 0} F(x + \varepsilon_n) = F(x)$$

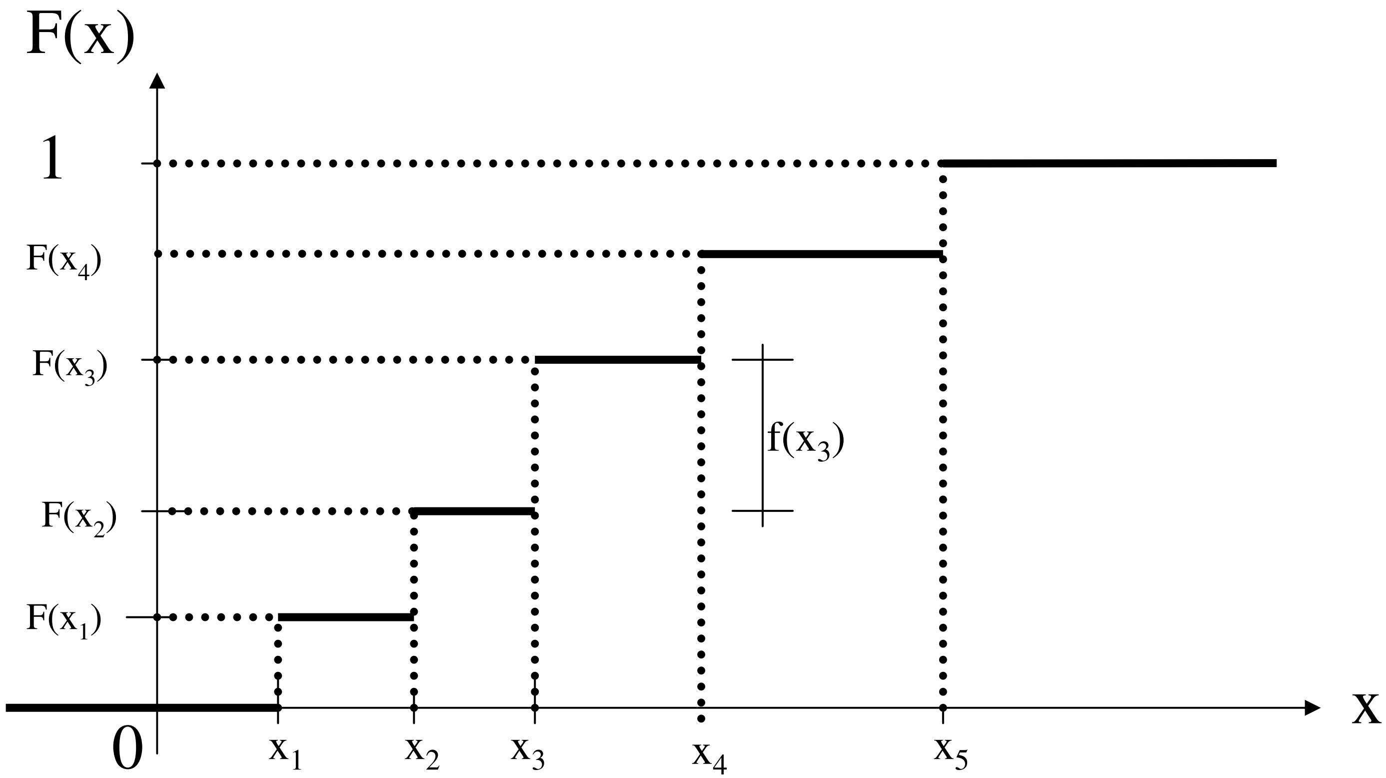
La f.r. F(x) è una funzione reale non-decrescente tale che

$$0 \leq F(x) \leq 1 \quad \forall x$$

La rappresentazione di F(x) è una "funzione a gradini".

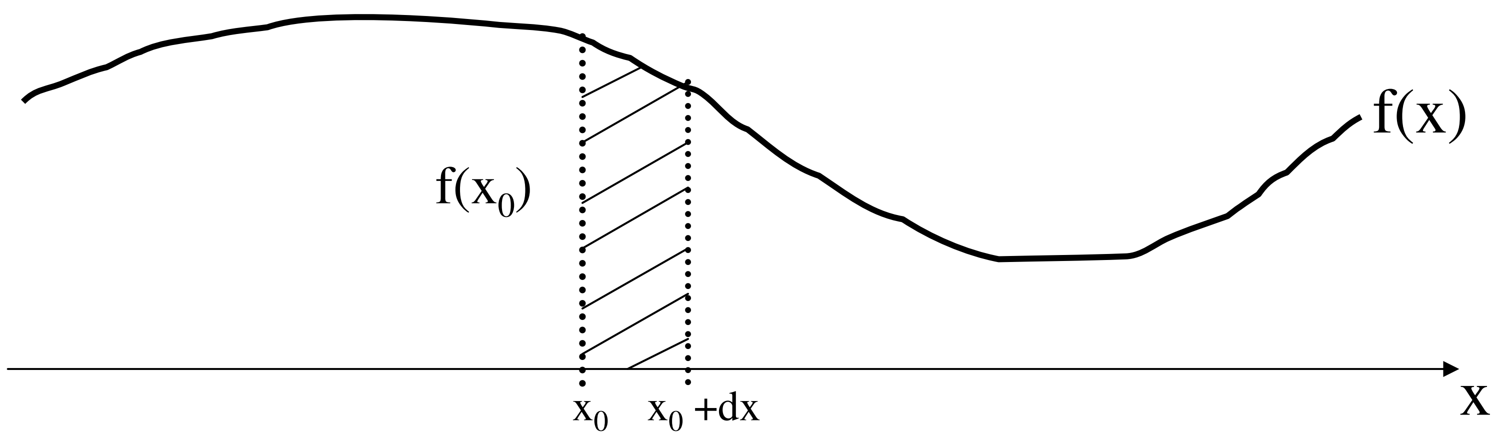
Esempio

X	f(x)
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$
x_3	$f(x_3)$
x_4	$f(x_4)$
x_5	$f(x_5)$



Una v.c. è continua se i valori che essa assume sono contenuti in un intervallo reale. In tale contesto, non è possibile elencare i valori che la v.c. X assume con le rispettive probabilità come nel caso discreto.

Il problema viene superato associando a ciascun punto dell'intervallo in cui è definita X una **funzione matematica**, f(x), che non è la probabilità, ma è proporzionale (a meno di un infinitesimo) alla probabilità di un intervallo <<sufficientemente piccolo>>, detta **funzione di densità**.



$$P_r\left[x_0 \le X \le x_0 + dx\right] = f(x_0)dx$$

f(x) soddisfa le seguenti proprietà

1. $f(x) \geq 0 \quad \forall x$

2. $\int_{\Re} f(x)dx = 1$

Def. 10. Una v.c. viene detta **continua** se esiste una funzione f(.) t.c.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad \forall x$$

dove F(.) e f(.) sono, rispettivamente, la f.r. e la f.d. della v.c. X.

Si osservi che data una funzione di ripartizione F(x), la funzione di densità è uguale a

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Def. 11. *Momenti semplici di ordine r*.

Se X è una v.c. il momento di ordine r, con r naturale, è definito dalla seguente:

$$E\left[X^{r}\right]=\int_{-\infty}^{+\infty} x^{r} f(x) dx$$

Nel caso continuo.

$$E\left[X^{r}\right]=\sum_{j} x_{j}^{r} f\left(x_{j}\right)$$

Nel caso discreto

Si osserva che per r=1 si ottiene il valore atteso (aspettativa) di X.

Def. 12. *Momenti centrali di ordine r*.

Se X è una v.c. il momento centrale di ordine r, con r naturale, è definito dalla seguente:

$$E\{[X-E(X)]^r\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\{x-E(X)\}^r f(x)dx$$

Nel caso continuo.

$$E\{[X-E(X)]^r\}=\sum_j\{x_j-E(X)\}^r f(x_j)$$

Nel caso discreto

Si osserva che per r=2 si ottiene la varianza di X.

Esercizio 20

Data la v.c. X con fd

$$f(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad \text{con } x>0 \quad \text{e} \quad \lambda>0$$

Determinare il momento primo e la varianza.

Operatori E(.) e V(.)

Data una v.c. X l'operatore E(.) non è altro che l'**aspettativa** di X.

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Se g(.) è una funzione di X allora

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

Proprietà

1. $E[C] = C \quad \forall$ C costante

2. $E[C_1 + C_2 X] = C_1 + C_2 E(X) \quad \forall\, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2$ costanti

3. $E[C_1 g_1(X) + C_2 g_2(X)] = C_1 E[g_1(X)] + C_2 E[g_2(X)]$

$\forall \;\; \mathrm{C}_1, C_2$ costanti

$\forall \;\; \mathrm{g}_1(.),\; g_2(.)$ funzioni di X

Esercizio. Dimostrare le proprietà 1,2, e 3.

L'operatore V(.) definisce la varianza della v.c. X

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{x - E(X)\}^2 f(x)dx = E\{[X - E(X)]^2\}$$

E' il momento centrale di ordine 2. Si può scrivere come differenza tra il momento secondo e il momento primo al quadrato, cioè

$$V(X) = E[X^2] - [E(X)]^2$$

1. $V(C) = 0$ Se C è costante

2. $V[C_1 + C_2 X] = C_2^2 V(X)$ Se C_1 e C_2 sono costanti

Esercizio. Dimostrare le proprietà 1 e 2.

Variabile casuale Scarto

Data una v.c. X con momento primo E[X] e V(X) entrambe finite, la seguente trasformazione

$$Y = X - E[X]$$

Definisce la v.c. scarto. E' immediato verificare che:

$$E[Y] = E\{X - E[X]\} = E[X] - E[X] = 0$$

$$V[Y] = V\{X - E[X]\} = V[X]$$

Esercizio 21

Sia X una variabile con funzione data da:

$$f(x) = kx^2 \qquad 0 \le x \le 3$$

a) determinare il valore di k affinché f(x) sia una funzione di densità;

b) calcolare i momenti semplici e centrali di ordine r=2.

Variabile casuale Standardizzata

Data una v.c. X con momento primo E[X] e V(X) entrambe finite, la seguente trasformazione

$$Z = \frac{X - E[X]}{\sqrt{V(X)}}$$

Definisce la v.c. standardizzata. E’ immediato verificare che:

$$E[Z] = E\left\{\frac{X - E[X]}{\sqrt{V(X)}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{V(X)}} E\{X - E[X]\} = 0$$

$$V[Z] = V\left\{\frac{X - E[X]}{\sqrt{V(X)}}\right\} = \frac{1}{V(X)} V\{X - E[X]\} = 1$$

Alcune tra le più note funzioni di probabilità e di densità.

Def. 14. *Funzione di probabilità di **Bernoulli***.

Si dice che la v.c. X ha distribuzione di Bernoulli se la f.p.di X è data da:

$$f(x;\theta) = \theta^{x}(1-\theta)^{1-x}$$

per x=0 oppure x=1, con $\theta \in [0,1]$

Verrà indicata con B(1,θ)

Esercizio 22. Dimostrare che

$$E[X] = \theta \qquad V[X] = \theta(1-\theta)$$

Def. 15. *Funzione di probabilità **Binomiale***.

Si dice che la v.c. X ha distribuzione Binomiale se la f.p.di X è data da:

$$f(x;n,\theta)=\binom{n}{x}\theta^{x}(1-\theta)^{n-x}$$

Verrà indicata B(n,θ)

per x=0,1,2,..,n, con $\theta\in[0,1]$ e $\binom{n}{x}=\frac{n!}{x!(n-x)!}$

Esercizio 23. Dimostrare che

$$E[X]=n\theta \qquad V[X]=n\theta(1-\theta)$$

Def. 16. *Funzione di probabilità di* ***Poisson***.

Si dice che la v.c. X ha distribuzione Poisson se la f.p.di X è data da:

$$f(x;\lambda)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

per x=0,1,2,.., con $\lambda > 0$

Verrà indicata con $\mathcal{P}(\lambda)$.

Esercizio 24. Dimostrare che

$$E[X]=\lambda \qquad V[X]=\lambda$$

Esercizio 25

E' noto che il 30% dei pezzi difettosi prodotti in una determinata fase produttiva può essere migliorato.

a. Qual è la probabilità che almeno 3 di un gruppo di 6 pezzi difettosi possono essere migliorati?

b. Qual è la probabilità che nessuno dei 6 pezzi difettosi può essere migliorato?

c. Qual è la probabilità che tutti possono essere migliorati?

Esercizio 26

Il numero medio di denunce in un'ora inoltrate ad una Compagnia di Assicurazioni per smarrimenti è di 3.1. Qual è la probabilità che in una data ora vengono inoltrate:

a. meno di 3 denunce?

b. esattamente 3 denunce?

c. almeno 3 denunce?

d. più di 3 denunce?

Def. 17. Funzione di densità **Uniforme** (o rettangolare).

Si dice che la v.c. X ha distribuzione Uniforme se la f.d.di X è data da:

$$f(x;a,b)=\frac{1}{(b-a)}$$

Verrà indicata con U(a,b).

per $a \leq x \leq b$ con $-\infty < a < b < +\infty$

Esercizio 27. Dimostrare che

$$E[X]=\frac{a+b}{2} \qquad V[X]=\frac{(b-a)^2}{12}$$

Def. 18. *Funzione di densità* ***Normale***.

Si dice che la v.c. X ha distribuzione Normale se la f.d.di X è data da:

$$f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Verrà indicata con $N(\mu,\sigma^2)$.

per $x \in \Re$ con $\mu \in \Re$ e $\sigma > 0$

Esercizio 28. Dimostrare che

$$E[X]=\mu \qquad V[X]=\sigma^2$$

Esercizio 29. Dimostrare che la fd Normale possiede le seguenti caratteristiche:

1. E' **simmetrica** intorno a μ.

2. E' **unimodale**.

3. Presenta **due flessi**.

4. Al variare di μ, sopposto σ costante, la curva si sposta lungo l'asse delle ascisse. Al variare di σ, supposto μ costante, la curva diventa **leptocurtica** (se σ diminuisce), **platicurtica** (se σ aumenta).

Tavole della v.c. Normale Standardizzata

Esercizio 30

Sia Z la v.c. normale standardizzata, calcolare:

a) $P[Z<0.42]$, b) $P[Z<-0.42]$, c) $P[Z>1.69]$, d) $P[Z<-1.69]$,
e) $P[-1.2<Z<2.1]$, f) $P[0.5<Z<0.8]$, g) $P[-1.62<Z<-0.51]$.

Esercizio 31

Sia Z la v.c. normale standardizzata, trovare b tale che:

a) $P[Z<b]=0.975$, b) $P[Z<b]=0.305$, c) $P[Z>b]=0.025$,
d) $P[Z>b]=0.8708$

Esercizio 32

Sia Z la v.c. normale standardizzata, trovare b tale che:

a) $P[-b<Z<b]=0.75$, b) $P[-b<Z<b]=0.8$,
c) $P[-b<Z<b]=0.99$, d) $P[-b<Z<b]=0.98$

Esercizio 33

Sia X una v.c. normale con $\mu=100$ e $\sigma=8$, calcolare:
a) $P[X<107]$, b) $P[X<97]$, c) $P[X>110]$, d) $P[X>90]$,
e) $P[95<X<106]$, f) $P[103<X<114]$, g) $P[88<X<100]$,
h) $P[60<X<108]$.

Esercizio 34

I voti ottenuti all'esame di matematica seguono una distribuzione normale. Il docente decide di dare il giudizio di "ottimo" a coloro che hanno ottenuto un voto superiore a 1.5σ del risultato medio e il giudizio "insufficiente" a coloro che hanno ottenuto un risultato inferiore a σ del risultato medio. Quale percentuale di studenti ha ottenuto il risultato "ottimo" e quale ha ottenuto il risultato "insufficiente"?

Esercizio 35

Dopo diversi sondaggi un fabbricante di calze da donna arriva alla conclusione che la lunghezza del piede di una donna adulta segue una legge Normale con parametri μ=24 cm e σ=3 cm. Decide di utilizzare tale distribuzione per determinare le taglie e le quantità corrispondenti da mettere in produzione. Si chiede:

a) in quale percentuale di casi si osserva una lunghezza di piede:

- i) superiore rispettivamente a 25, 30, 36 cm;
- ii) inferiore rispettivamente a 15, 20, 21 cm;

b) determinare i valori di A e B tali che:

- i) nel 30% dei casi la lunghezza del piede sia superiore ad A;
- ii) nel 20% dei casi la lunghezza del piede sia inferiore a B;

c) il fabbricante decide di ripartire la produzione su 5 diverse taglie, le quali vengono determinate nel seguente modo:

si prende l'intervallo simmetrico alla media al quale si associa una probabilità del 90%; tale intervallo viene poi suddiviso in tre piccoli intervalli di uguale lunghezza.

Determinare :

i) le lunghezze dei piedi che delimitano i diversi intervalli;

ii) le quote percentuali messe in produzione per le diverse taglie.

Def. 20. *Funzione di densità* ***Esponenziale*** *(negativa).*

Si dice che la v.c. X ha distribuzione Esponenziale se la f.d.di X è data da:

$$f(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Verrà indicata con E(λ).

per $x > 0$ con $\lambda > 0$

Esercizio 37. Dimostrare che

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} \qquad V[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

Funzioni di densità (o di probabilità) congiunte.

Nel caso in cui su uno stesso spazio campionario Ω si definiscono più funzioni allora si è in presenza di v.c. multiple.

Dato uno spazio campionario Ω, riferito ad un dato esperimento, supponiamo di costruire:

- una prima regola, X, che associa ad ogni elemento di Ω un numero reale, x;

- una seconda regola, Y, che associa ad ogni evento di Ω un numero reale, y;

successivamente, calcoliamo le probabilità del contemporaneo verificarsi delle coppie (x,y).

$$X : \Omega \to \Re \qquad e \mapsto X(e)$$

$$Y : \Omega \to \Re \qquad e \mapsto Y(e)$$

$$P_r\{X = x, Y = y\}$$

$X \backslash Y$	y_1	y_2	....	y_j	.....	y_r	
x_1	p_{11}	p_{12}	....	p_{1j}	....	p_{1r}	$p_{1\bullet}$
x_2	p_{21}	p_{22}	....	p_{2j}	....	p_{2r}	$p_{2\bullet}$
....	....	....	....	....	....	....	....
x_i	p_{i1}	p_{i2}	....	p_{ij}	....	p_{ir}	$p_{i\bullet}$
....	....	....	....	....	....	....	....
x_s	p_{s1}	p_{s2}	....	p_{sj}	....	p_{sr}	$p_{s\bullet}$
	$p_{\bullet 1}$	$p_{\bullet 2}$	....	$p_{\bullet j}$	....	$p_{\bullet r}$	1

dove

$$p_{ij} = P_r\{X = x_i ; Y = y_j\}$$

È la probabilità del contemporaneo verificarsi della coppia di modalità (x_i, y_j).

Inoltre,

$$p_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{r} p_{ij} \qquad\qquad p_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{s} p_{ij}$$

Sono le probabilità marginali, rispettivamente, di X e di Y.

Def. 22. Si chiama **funzione di probabilità congiunta** delle v.c. discrete X ed Y la funzione

$$f(x, y) = P_r\{X = x, Y = y\}$$

Che soddisfa le seguenti proprietà

1) $f(x, y) \geq 0 \quad \forall\ (x, y)$
2) $\sum_{x} \sum_{y} f(x, y) = 1$

Da f(x,y) è possibile determinare le f. di p. **marginali** di X e di Y, cioè

$$f(x) = \sum_{y} f(x, y) \qquad f(y) = \sum_{x} f(x, y)$$

E quelle **condizionate**

$$f(x / y) = \frac{f(x, y)}{f(y)} \qquad f(y) > 0$$

$$f(y / x) = \frac{f(x, y)}{f(x)} \qquad f(x) > 0$$

Def. 23. Si chiama **funzione di densità congiunta** delle v.c. continue X ed Y la funzione

$$f(x, y)$$

avente le seguenti proprietà

1) $f(x,\ y) \geq 0 \quad \forall\ (x,\ y)$

2) $\int_x \int_y f(x,\ y)dxdy = 1$

Da f(x,y) è possibile determinare le f. di p. marginali di X e di Y, cioè

$$f(x) = \int_y f(x, y)dy \qquad f(y) = \int_x f(x, y)dx$$

E quelle condizionate

$$f(x / y) = \frac{f(x, y)}{f(y)} \qquad f(y) > 0$$

$$f(y / x) = \frac{f(x, y)}{f(x)} \qquad f(x) > 0$$

Condizione di indipendenza

Def. 24. Due v.c. X ed Y sono **indipendenti** se e solo se una delle seguenti condizioni è soddisfatta

$$1)\quad f(x,y) = f(x)f(y) \quad \forall(\mathrm{x},\mathrm{y})$$

$$2)\quad f(x/y) = f(x) \quad \forall(\mathrm{x},\mathrm{y})$$

$$3)\quad f(y/x) = f(y) \quad \forall(\mathrm{x},\mathrm{y})$$

Momenti misti di ordine k+m

Def. 25. Siano X ed Y due v.c. con fd (o fp) congiunta f(x,y), è chiamato momento misto di ordine k+m la quantità:

$$\mu_{k,m} = E\left[X^k Y^m\right] = \iint_{\Re\times\Re} x^k y^m f(x,y)\,dxdy$$

nel caso continuo.

$$\mu_{k,m} = E\left[X^k Y^m\right] = \sum_x \sum_y x^k y^m f(x,y)$$

nel caso discreto.

Analogamente, i momenti misti della v.c. scarto sono

$$\overline{\mu}_{k,m} = E\left\{\left[X - E(X)\right]^k \left[Y - E(Y)\right]^m\right\} =$$

$$= \iint_{\Re \times \Re} (x - \mu_{10})^k (y - \mu_{01})^m f(x, y)\, dx dy$$

nel caso continuo.

$$\overline{\mu}_{k,m} = E\left\{\left[X - E(X)\right]^k \left[Y - E(Y)\right]^m\right\} =$$

$$= \sum_x \sum_y (x - \mu_{10})^k (y - \mu_{01})^m f(x, y)$$

nel caso discreto.

Si osservi che

$$\mu_{0,0} = 1 \quad \mu_{k,0} = E\left[X^k\right] \quad \mu_{0,m} = E\left[Y^m\right]$$

$$\bar{\mu}_{2,0} = V\left[X\right] \quad \bar{\mu}_{0,2} = V\left[Y\right]$$

Se X ed Y sono indipendenti allora

$$\mu_{k,m} = \mu_{k,0}\mu_{0,m}$$

$$\mu_{k,m} = E\left[X^k Y^m\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^k y^m f(x,y)\,dxdy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^k y^m f(x) f(y)\,dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} y^m f(y)\,dy = \mu_{k,0}\mu_{0m}$$

Def. 26. *Valore Atteso Condizionato*.

Sia (X,Y) una v.c. bidimensionale con fd congiunta f(x,y) e sia g(.,.) una funzione di due variabili. Il valore atteso condizionato di g(X,Y) dato che X=x è definito dalla seguente

$$E\{g(X,Y)/X=x\}=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(y/x)dy$$

N.B. Dato che effettuiamo l'integrale definito rispetto a y tale quantità è funzione di x.

Def. 27. *Varianza Condizionata*.

La varianza di Y dato che X=x è definita da:

$$V\{Y / X = x\} = E\left[Y^2 / X = x\right] - \{E[Y / X = x]\}^2$$

Dove si è posto nella definizione precedente $g(X,Y)=Y^2$ e $g(X,Y)=Y$ per definire, rispettivamente, il momento secondo ed il momento primo di Y dato che X=x.

Covarianza

La covarianza è una misura della strettezza del legame lineare tra due v.c. X ed Y. Supposto che esistano sia i momenti primi di X e di Y che il momento primo misto, la covarianza è definita da

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_{1,0})(y-\mu_{0,1})f(x,y)\,dx\,dy$$

Nel caso continuo

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\sum_{x}\sum_{y}(x-\mu_{1,0})(y-\mu_{0,1})f(x,y)$$

Nel caso discreto

Teo. 12. La covarianza si può scrivere come differenza tra il momento primo misto e il prodotto dei momenti primi.

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E\left[(X-\mu_{1,0})(Y-\mu_{0,1})\right]=$$
$$=E(XY)-E(X)E(Y)=$$
$$=\mu_{1,1}-\mu_{1,0}\mu_{0,1}=\overline{\mu}_{1,1}$$

Dimostrazione. *Esercizio*

Osservazione:

$$\text{se } X\perp Y \Rightarrow \mathrm{Cov}(X,Y)=0$$

$$\text{In generale, se } \mathrm{Cov}(X,Y)=0 \quad \not\Rightarrow \quad X\perp Y$$

Esercizio 31. Dimostrare che se W=a+bX e se Z=c+dY allora

$$\mathrm{Cov}(W, Z) = bd\,\mathrm{Cov}(X, Y)$$

Teo. 13. Disuguaglianza di Cauchy-Swartz.

Siano X ed Y due v.c. con momenti secondi finiti, allora

$$[\mathrm{Cov}(X, Y)]^2 \leq V(X)V(Y)$$

Inoltre, $$[\mathrm{Cov}(X, Y)]^2 = V(X)V(Y)$$

Se e solo se tra X ed Y vi è una perfetta relazione lineare.

Dimostrazione. *Esercizio*.

Dalla dis. Di C-S si costruisce l'indice di correlazione

$$-\sqrt{V(X)V(Y)} \le \left[Cov(X,Y)\right] \le \sqrt{V(X)V(Y)}$$

$$-1 \le \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} \le 1 \qquad\qquad -1 \le \rho(X,Y) \le 1$$

Esercizio 32. Dimostrare che se W=a+bX e se Z=c+dY allora

$$\rho(W,Z) = \rho(X,Y)$$

Esercizio 39

La v.c. doppia (X,Y) segue una distribuzione di probabilità discreta rappresentata dalla tavola seguente:

X / Y	1	2	3	
2	1/12	1/6	1/12	1/3
3	1/6	0	1/6	1/3
4	0	1/3	0	1/3
	1/4	½	1/4	1

Calcolare :

f(x); f(y); f(x/y=2); f(x/y=3); f(x/y=4); f(y/x=1); f(y/x=2); f(y/x=3); E(X); E(Y); E(X/Y=2); E(X/Y=3); E(X/Y=4); E(Y/X=1); E(Y/X=2); E(Y/X=3); V(X); V(Y); V(X/Y=2); V(X/Y=3); V(X/Y=4); V(Y/X=1); V(Y/X=2); V(Y/X=3); Cov(X,Y); ρ(X,Y).

Verificare se X ed Y sono indipendenti.

Esercizio 40

La v.c. doppia (X,Y) ha fd data da:

$$f(x,y)=\begin{cases} ke^{(x+y)} & x<0 \quad e \quad y<0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

a) determinare il valore della costante k;

b) Calcolare le fd marginali e condizionali;

c) Verificare se le v.c. X ed Y sono tra loro indipendenti.

Esercizio 41

La v.c. doppia (X,Y) ha come fd congiunta:

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

a) calcolare E(X), E(Y), V(X), V(Y), V(X/Y), V(Y/X);
b) calcolare la Cov(X,Y) e ρ(X,Y).
c) dire se X e Y sono indipendenti.

Esercizio 42

Se X=Z+W e Y=T+W, essendo le v.c. Z,T,W tra loro incorrelate e con varianza costante, si dimostri che ρ(X,Y)=1/2.

Normale Bi-dimensionale.

Def. 28. Si dice che la v.c. (X,Y) ha distribuzione Normale Bidimensionale se presenta la seguente fd congiunta

$$f(x,y;\mu_x,\mu_y,\sigma_x,\sigma_y,\rho)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2-2\rho\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}+\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]\right\}$$

con

$$\mu_x\in\Re,\mu_y\in\Re,\sigma_x>0,\sigma_y>0\ \text{ e }\ \rho\in[-1,1]$$

Caratteristica importante di tale distribuzione è la seguente:

$$\text{se} \quad \rho(X, Y) = 0 \Rightarrow X \perp Y$$

Dimostrazione. Se r=0 la fd congiunta si riduce a

$$f(x, y; \mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]\right\}$$

Quest’ultima coincide con la fattorizzazione delle fd marginali di X e di Y

$$f(x, \mu_x, \sigma_x) \times f(y; \mu_y, \sigma_y)$$

Si dimostra che data una v.c. normale bivariata (X,Y), le fd **marginali** sono ancora normali, cioè:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y; \mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho)\, dy = f(x; \mu_x, \sigma_x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y; \mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho)\, dx = f(y; \mu_y, \sigma_y)$$

Nello stesso contesto, anche le distribuzioni condizionate di X dato che Y=y e di Y dato che X=x sono normali con parametri, rispettivamente, dati da

$$E\left[X / Y = y\right] = \mu_x + \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \mu_y)$$

$$V\left[X / Y = y\right] = \sigma_x^2 (1 - \rho^2)$$

e

$$E\left[Y / X = x\right] = \mu_y + \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \mu_x)$$

$$V\left[Y / X = x\right] = \sigma_y^2 (1 - \rho^2)$$

In altri termini, abbiamo

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} \Rightarrow X/Y = y \sim N\left(\mu_x + \frac{\rho\sigma_x}{\sigma_y}(y-\mu_y),\ \sigma_x^2(1-\rho^2)\right)$$

$$f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} \Rightarrow Y/X = x \sim N\left(\mu_y + \frac{\rho\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x),\ \sigma_y^2(1-\rho^2)\right)$$

Def. 29. *Valore atteso.*

Sia $(X_1,\ldots,X_k)$ una v.c. k-dimensionale con densità $f(x_1,\ldots,x_k)$. Il valore atteso di una funzione $g(.,\ldots,.)$ della v.c. $(X_1,\ldots,X_k)$ è definito da:

$$E[g(X_1,\ldots,X_k)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1,\ldots,x_k) f(x_1,\ldots,x_k) dx_1 \ldots dx_k$$

Teo. 15. Siano $X_1,\ldots,X_n$ n v.c. e siano $g_j(X_1,\ldots,X_n)$, j=1,…,m, m funzioni delle n v.c., allora

$$E\left[\sum_{j=1}^{m} c_j g_j(X_1,\ldots,X_k)\right] = \sum_{j=1}^{m} c_j E[g_j(X_1,\ldots,X_k)]$$

dove $c_1,\ldots,c_m$ sono costanti reali.

Corollario.

$$E\left[\sum_{j=1}^{m} c_j X_j\right] = \sum_{j=1}^{m} c_j E\left[X_j\right]$$

Teo. 16. Siano $X_1,\ldots,X_n$ n v.c., allora

$$V\left[\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 V\left(X_i\right) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{i \neq j \\ j=1}}^{n} c_i c_j Cov(X_i, X_j)$$

Corollario. Se le X_i, i=1,…,n sono indipendenti allora

$$V\left[\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 V\left(X_i\right)$$

Teorema Limite Centrale

Siano $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ una successione di v.c. **iid** con valore atteso μ e varianza σ^2 finite, la v.c.

$$Z_n = \frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{V[S_n]}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)$$

dove $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

al divergere di n, converge in distribuzione alla v.c. N(0,1), cioè

$$\lim_{n \to \infty} P_r\{Z_n \le z_0\} = \Phi(z_0) = \int_{-\infty}^{z_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Riferimenti Bibliografici.

- G. **C**icchitelli (1984), "Probabilità e Statistica". Maggioli Editore. Rimini. [**C**].

- A.M.**M**ood, F. **G**raybill e D.C. **B**oes (1988), "Introduzione alla Statistica", McGraw-Hill, Milano. [**MGB**].

- D. **P**iccolo e C. **V**itale (1984), "Metodi Statistici per l'analisi economica". Il Mulino, Bologna. [**PV**].

- R. **O**rsi (1985), "Probabilità ed Inferenza Statistica", Il Mulino, Bologna. [**O**].

- D. **P**iccolo (2000), "Statistica", il Mulino, Bologna. [**P**].