

PREMIO EQUO E PREMIO NETTO

Prof. Cerchiara Rocco Roberto

Materiale e Riferimenti

- 1. Capitolo 2 del testo Tecnica attuariale delle assicurazioni contro i Danni (Daboni 1993)**
- 2. Lucidi distribuiti in aula**

La teoria dell'utilità considera il fatto che l'assicurato, soggetto economico anch'esso avverso al rischio, accetta l'iniquità del contratto ritenendolo vantaggioso nonostante il caricamento, $P - E(X)$, imposto dall'assicuratore e purché esso non sia troppo elevato.

Il caricamento che dal premio equo fa passare ad un premio netto P maggiore di $E(X)$ è giustificato anche dall'adozione del criterio della probabilità di rovina. Tale criterio con carattere di oggettività, almeno apparente, si propone come alternativo a quello dell'utilità attesa che ha carattere soggettivo. L'applicazione di questo criterio consiste nella determinazione di s quando sia stato fissato un livello, p_0 , per la probabilità di insolvenza. Il caricamento di sicurezza è dato da $s = P - E(X)$.

In una forma molto semplificata la teoria del rischio può porsi nei seguenti termini: sia X la variabile casuale che rappresenta il costo totale dei sinistri in un certo periodo.

La variabile X (con media m e scarto medio σ) ha come funzione di distribuzione $F(X)$. Per un numero di rischi sufficientemente grande possiamo applicare il teorema del limite centrale e quindi approssimare con una variabile normale. Avremo cioè:

$$F(x) \approx \Phi\left(\frac{x - m}{\sigma}\right)$$

Denotando per ogni ε nell'intervallo 0 - 1 e con x_ε e y_ε la determinazione di X per la quale si ha $F(x_\varepsilon) = \Phi(x_\varepsilon) = 1 - \varepsilon$, si tratterà di ricercare una relazione del tipo $x_\varepsilon = f(y_\varepsilon)$

In prima approssimazione si ottiene: $x_\varepsilon = m + \sigma y_\varepsilon$

Il sovra-premio da applicare secondo la teoria del rischio (in questa forma semplificata) è quindi proporzionale allo scarto medio.

A prescindere dalle teorie applicate, bisogna tener presente che l'impresa deve garantirsi un profitto industriale che consentirà la formazione di riserve patrimoniali destinate a far fronte al rischio di insolvenza. In ogni caso il premio netto P può essere visto come un *equivalente certo dell'importo* X , risarcimento aleatorio dell'assicuratore. Se possiamo conoscere o ipotizzare la distribuzione di probabilità di X , l'equivalente certo P ne è un suo funzionale.

Il premio equo P_e è un particolare equivalente certo, il corrispondente funzionale è la speranza matematica di X , ovvero indicata con $F(x)$ la funzione di ripartizione della distribuzione di X , il premio equo è pari a

$$P_e = E(X) = \int_0^{+\infty} x dF(x)$$

Confronti fra vari criteri di calcolo del premio netto

Vediamo ora alcuni criteri di calcolo del premio netto di un contratto e le loro proprietà.

a) Criterio della varianza

$$P = E(X) + \alpha \text{var}(X) \quad \alpha > 0 \text{ reciproco di un importo}$$

b) Criterio dello scarto quadratico medio

$$P = E(X) + \beta \sigma(X) \quad \beta > 0 \text{ dimensionale}$$

c) Criterio del valore atteso o della speranza matematica

$$P = (1 + \gamma)E(X) \quad \gamma > 0 \text{ dimensionale}$$

d) Criterio dell'utilità attesa: $E[u(P - X)] = 0$

1. utilità quadratica: $P = E(X) + B - \sqrt{B^2 - \text{var}(X)}$

$$2. \text{ utilità esponenziale: } P = B \ln E \left[e^{\frac{X}{B}} \right]$$

Possiamo fare le seguenti osservazioni:

- Per una funzione di utilità quadratica il criterio dell'utilità attesa si riconduce sostanzialmente a quello della varianza.
- Per tutti i criteri di calcolo esiste un caricamento di sicurezza tale che $P(X) > E(X)$.
- Per i criteri di utilità quadratica ed esponenziale, $X \leq M$ implica che $P(X) \leq M$, dove M rappresenta il massimale. Questo perché il premio calcolato secondo i due criteri è una media "interna" del risarcimento X : se dunque è $0 \leq X \leq M$, è anche $0 \leq P(X) \leq M$.

Per la funzione di utilità esponenziale $P(X)$ è media esponenziale di X e come tale è media interna.

Nel caso dell'utilità quadratica, se $X \leq M$ per poter applicare tale criterio deve essere $B \geq M$, e quindi sarà anche $\text{var}(X) \leq E(X^2) \leq M^2 \leq B^2$. Inoltre dalla $P = E(X) + B - \sqrt{B^2 - \text{var}(X)}$, si vede che il premio è funzione decrescente di B , quindi $P = E(X) + M - \sqrt{M^2 - \text{var}(X)}$ è il massimo degli equivalenti di X secondo il criterio dell'utilità attesa quando $u(x)$ è quadratica.

Inoltre è $P(X) \leq M$ perché se fosse il contrario si otterrebbe che $P = E(X) + M - \sqrt{M^2 - \text{var}(X)}$ che conduce all'assurdo: $[E(X)]^2 + \text{var}(X) = E(X^2) > M^2$. Questa proprietà non è verificata dagli altri criteri, perché l'entità del caricamento potrebbe essere tale da rendere $P(X) > M$.

- Per il criterio dello scarto quadratico medio e del valore atteso vale il principio dell'omogeneità (positiva), ossia $P(aX) = aP(X)$, $a > 0$.
- Per tutti i criteri, tranne quello del valore atteso, vale la proprietà traslativa: $P(X + C) = P(X) + C$, $C > 0$.

- Il criterio della varianza e del valore atteso godono della proprietà additiva se X e Y sono stocasticamente indipendenti:
 $P(X + Y) = P(X) + P(Y)$
- Per il criterio dello scarto quadratico medio e del valore atteso è possibile effettuare la decomposizione di X in due importi non negativi, X_1 e X_2 , in modo tale che sia $P(X) = P(X_1 + X_2) \leq P(X_1) + P(X_2)$. Questa proprietà richiede che non sia mai vantaggioso per l'assicurato stipulare, anziché un unico contratto relativo al rischio X , due o più contratti relativi a due o più rischi nei quali possa decomporre in modo arbitrario X stesso.
I due risarcimenti X_1 e X_2 in cui può decomporre X sono correlati positivamente (stocasticamente dipendenti: un aggravamento del rischio X comporta aggravamenti per ogni sua componente).

Vedere anche l'esempio del calcolo del Premio Netto con il criterio dell'utilità attesa a pag.55-57 del Daboni.