Il modello markoviano per la rappresentazione del Sistema Bonus Malus

Prof. Cerchiara Rocco Roberto

Materiale e Riferimenti

1. **Lucidi distribuiti in aula**

2. **Lemaire 1995 (pag.6-10 e pag. 74-78)**

3. **Galatioto G. 2004 (Atti del VI Congresso Nazionale di Scienza e Tecnica delle Assicurazioni, Bologna).**

1. SUCCESSIONE ALEATORIA

Sia S un sistema che evolve nel tempo in maniera aleatoria. Ad ogni istante, si può associare una variabile casuale che va a descrivere lo stato in cui si trova il sistema in quell'istante, associazione possibile perché tale stato è a priori, ovvero prima dell'osservazione aleatorio. Si denota con:

$$\{E^t, t \in T\} \qquad t \geq 0$$

dove T è un insieme discreto di possibili valori di t, la *successione di variabili aleatorie* dipendenti dal tempo t e che assumono valori in un insieme finito E, i cui elementi sono appunto gli *stati* del sistema. In particolare, si suppone che ognuna delle variabili E^t può assumere solo queste m determinazioni:

$$E = \{E_1, E_2, \ldots, E_m\}$$

dove E è denominato spazio degli stati.

Per descrivere come evolve il sistema nel corso del tempo, si necessita della definizione delle probabilità di transizione da uno stato all'altro.

Innanzitutto, si indica genericamente con $A^0_{i_0}$ la probabilità che il sistema si trovi al tempo 0 nello stato E_{i_0}, ovvero è[1]:

$$A^0_{i_0} = \mathrm{Prob}(E^0 = E_{i_0})$$

con i_0 che prende ovviamente i valori da 1 a m. Si può quindi rappresentare mediante

[1] Si veda in proposito Galatioto G. (2004).

un vettore riga di dimensione m, chiamato vettore iniziale, la distribuzione di probabilità al tempo iniziale 0:

$$L_0 = [A_1^0, A_2^0, \ldots\ldots, A_m^0]$$

Conoscendo E^0 e L_0 , si costruisce l'insieme delle m^2 probabilità condizionate di transizione tra gli istanti 0 e 1, il cui generico elemento è dato da:

$$P_{i_1}^{(i_0)} = Prob(E^1 = E_{i_1} / E^0 = E_{i_0}) = \frac{Prob(E^1 = E_{i_1}, E^0 = E_{i_0})}{Prob(E^0 = E_{i_0})} = \frac{A_{i_0,i_1}^{0,1}}{A_{i_0}^0}$$

con i_0, i_1 = 1,……,r. Questa legge condizionale di evoluzione si indica con $T_1^{(0)}$.

La legge per le m^3 probabilità di transizione tra gli istanti 1 e 2, noti gli stati precedenti del sistema E^0 e E^1 è rappresentata da:

$$P_{i_2}^{(i_0,i_1)} = Prob(E^2 = E_{i_2} / E^1 = E_{i_1}, E^0 = E_{i_0}) =$$

$$= \frac{Prob(E^2 = E_{i_2}, E^1 = E_{i_1}, E^0 = E_{i_0})}{Prob(E^1 = E_{i_1}, E^0 = E_{i_0})} = \frac{A_{i_0,i_1,i_2}^{0,1,2}}{A_{i_0}^0 A_{i_1}^1}$$

con i_0, i_1, i_2 = 1,……,r. La legge si indica con $T_2^{(0,1)}$.

Si procede in maniera analoga considerando tutte le coppie di istanti successivi a 2. Così tra h-1 e h si avranno m^{h+1} probabilità condizionate:

$$P_{i_h}^{(i_0,i_1,\ldots\ldots,i_{h-1})} = \frac{A_{i_0,i_1,i_2,\ldots,i_h}^{0,1,2,\ldots\ldots,h}}{A_{i_0}^0 A_{i_1}^1 \ldots\ldots A_{i_{h-1}}^{h-1}}$$

e la legge di probabilità sarà, per analogia, $T_h^{(0,1,.....,h-1)}$.

L'insieme delle leggi:

$$\begin{cases} T_1^{(0)} \\ T_2^{(0,1)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ T_h^{(0,1,.....,h-1)} \end{cases}$$

si definisce sistema delle <u>leggi condizionate fondamentali</u>.

2. DEFINIZIONE DI CATENA DI MARKOV

Si considera ora la generica legge condizionata $T_{h+1}^{(0,1,.....,h-1,h)}$ tra gli istanti h e h+1 e si suppone che vale la seguente condizione[2]:

$$P_{i_h}^{(i_0,i_1,......,i_{h-1})} = \text{Prob}(E^{h+1} = E_{i_{h+1}} = E_j / E^h = E_{i_h} = E_i, E^{h-1} = E_{i_{h-1}}, ..., E^0 = E_{i_0}) =$$

$$= \text{Prob}(E^{h+1} = E_j / E^h = E_i)$$

per ogni ($h \geq 1$) e $E_{i_0}, E_{i_{h-1}}, ..., E_i, E_j \in E$.

Tenendo conto di questa informazione, si può scrivere più semplicemente:

$$P_{i_h}^{(i_0,i_1,......,i_{h-1})} = P_{ij}^{(h,h+1)}$$

In questo caso, la successione $\{E^t\}_{t\geq 0}$ è denominata ***catena di Markov***. In altre

[2] Essa implica che le probabilità di transizione tra due istanti successivi sono in numero pari a m^2.

parole, la catena di Markov è una particolare successione aleatoria – a parametro t discreto – caratterizzata da probabilità condizionate di transizione (ossia le probabilità che regolano il passaggio da uno stato all'altro) che dipendono unicamente dallo stato assunto dal sistema nell'istante precedente a quello considerato e non anche dalla storia passata: è per tale ragione, che si dice che il processo di Markov è un processo "senza memoria".

Le probabilità di transizione, vengono racchiuse in una matrice del tipo:

$$M_{h+1}^{(h)} = [P_{ij}^{(h,h+1)}]$$

avente dimensione ***m * m***, essendo m i possibili stati del sistema. Ne consegue che il sistema delle leggi condizionate fondamentali diventa un sistema di matrici ***m * m***.

3. LE DUE PRINCIPALI PROPRIETÀ DELLA SUCCESSIONE DI MARKOV:L'OMOGENEITÀ E LA REGOLARITÀ

3.1 OMOGENEITA'

Se le probabilità di passaggio sono stazionarie nel senso che dipendono dagli stati E_i e E_j e non dall'istante h in cui avviene la transizione, allora la catena di Markov viene detta **omogenea** nel tempo; in questa circostanza, le probabilità $P_{ij}^{(h,h+1)}$ si denotano soltanto con P_{ij} e le matrici $M_{h+1}^{(h)}$ sono ovviamente tutte uguali ad un'unica matrice M denominata ***matrice di evoluzione***.

In formule è:

$$M_{h+1}^{(h)} = M = [P_{ij}] \qquad \forall h \in N$$

e la struttura della matrice M è riportata in tabella:

Stati del sistema	E_1	E_2	.....	E_j	.....	E_m
E_1	P_{11}	P_{12}	.....	P_{1j}	.....	P_{1m}
E_2	P_{21}	P_{22}	.....	P_{2j}	.....	P_{2m}
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
E_i	P_{i1}	P_{i2}	.....	P_{ij}	.....	P_{im}
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
E_m	P_{m1}	P_{m2}	.....	P_{mj}	.....	P_{mm}

La suddetta matrice gode delle seguenti proprietà:

- è quadrata di dimensioni $m * m$;
- ogni valore P_{ij} è compreso tra 0 e 1;
- la somma degli elementi di ogni riga è uguale a 1.

A questo punto, nota la distribuzione di probabilità iniziale che è rappresentata dal vettore L_0 e nota la matrice di evoluzione M, si può studiare l'evoluzione del sistema, trascorso un istante (quindi al tempo 1), moltiplicando il vettore iniziale per la matrice di transizione[3]. Quindi è:

$$L_1 = L_0 M$$

Per gli istanti successivi ad 1, con analogo procedimento moltiplicativo, si costruiscono le relazioni riportate di seguito:

$$L_2 = L_1 M = L_0 M M = L_0 M^2$$

……………..

$$L_h = L_{h-1} M = L_0 M^h$$

dove evidentemente L_h riproduce l'evoluzione del sistema dopo h istanti. Si sottolinea inoltre che M^h rappresenta la potenza di ordine h della matrice di transizione M e i suoi elementi sono le probabilità di transizione $P_{ij}^{(h)}$ in h passi.

Da quanto fin qui esposto deriva che:

$$M_{t+h}^{(t)} = M^h \qquad \forall t$$

il che assicura l'omogeneità del sistema S.

3.2 REGOLARITA'

Per completare il discorso sulle catene di Markov, si rende opportuno definire una seconda proprietà – la quale risulterà utile nel seguito – denominata di regolarità[4]. Si dice che il sistema S è **regolare** se per t che tende a infinito, le potenze successive della matrice M tendono verso una matrice composta di *r*

[3] Le moltiplicazioni sono effettuate secondo le comuni regole del calcolo matriciale.
[4] Cfr., Galatioto G. (2004).

righe *A* tutte identiche della forma:

$$A = [a_1, a_2, ..., a_m]$$

in cui alcune componenti sono nulle[5]. Il vettore *A* è detto legge limite degli stati ed è tale che vale la seguente relazione:

$$A = MA$$

Si riporta in ultimo un teorema che fornisce una condizione necessaria e sufficiente affinché una successione di Markov omogenea sia regolare.

Teorema: Condizione necessaria e sufficiente perché una successione di Markov omogenea sia regolare è che tra i differenti stati possibili di un sistema S oggetto di studio ne esista uno, E_s, tale che prendendo t molto grande si abbia:

$$\exists s, t_0 / \forall i \;\; P_{is}^{t_0} > 0$$

dove $P_{is}^{t_0}$ è la probabilità di transitare dallo stato i allo stato s in t_0 operazioni.

4. IL SISTEMA DI TARIFFAZIONE BONUS-MALUS INTERPRETATO COME UNA CATENA DI MARKOV

E degli elementi che vanno a definire il sistema Bonus-Malus quattro sono quelli che permettono di inquadrarlo correttamente nell'ambito della teoria sulle

[5] Se invece, il vettore *A* ha tutte componenti positive ($a_i > 0$ per ogni i) il sistema è detto positivamente regolare. Esistono due teoremi che assicurano questa condizione. Si veda in proposito Galatioto G. (2004).

catene di Markov[6]:

- In primo luogo, esso realizza la suddivisione delle polizze – appartenenti ad una prefissata classe tariffaria individuata sulla base delle caratteristiche del rischio rilevate a priori – in un numero finito di classi di merito, in maniera tale che il premio dipenda solo dalla classe;
- La classe di Bonus-Malus di appartenenza nel periodo corrente dipende soltanto dalla classe del periodo precedente e dal numero dei sinistri con responsabilità causati dall'assicurato nello stesso periodo: il passato, ovvero la completa storia di sinistro e le classi occupate nei vari anni, non contano per determinare la classe presente raggiunta;
- La presenza di regole di evoluzione per individuare la classe di arrivo, una volta noti i due precedenti fattori;
- Infine, l'esistenza di una classe finale che tutti gli assicurati possono raggiungere, dopo un periodo alquanto lungo, non dando origine ad alcun sinistro.

Può in definitiva dirsi che il sistema Bonus-Malus forma una catena di Markov e che questa è anche omogenea e regolare, i cui stati sono le differenti classi di merito.

---

[6] Cfr., Galatioto G. (2004).

5. LA MATRICE DI EVOLUZIONE

Per quanto riguarda le regole di evoluzione del sistema Bonus-Malus, lo strumento utile per rappresentarle è costituito da una particolare operazione cosiddetta trasformazione o traslazione[7]:

$$T_k(i) = j \qquad \text{con } i,j = 1,2,\ldots..,m$$

che associa alla classe di merito **i** la classe **j** in dipendenza dal numero k dei sinistri con responsabilità, riportati dall'assicurato. In base ad essa, si va a strutturare la matrice quadrata di evoluzione – di ordine *m* perché m sono le classi del sistema Bonus-Malus – che viene denotata con T_k:

$$T_k = [t_{ij}^{(k)}]$$

e il cui generico elemento $t_{ij}^{(k)}$ è definito nel modo seguente:

$$t_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{se } T_k(i) = j \\ 0 & \text{se } T_k(i) \neq j \end{cases}$$

per cui valgono le relazioni sotto:

$$t_{ij}^{(k)} \geq 0 \qquad \text{e} \qquad \sum_j t_{ij} = 1$$

Chiaramente si costruiscono un numero k di matrici di evoluzione – matrici di soli uno e zero – una per ogni possibile valore di k (con k = 0,1,2,….).

[7] Si veda in proposito Loimaranta (1972) e Lemaire J. (1995).

6. LA MATRICE MARKOVIANA DI TRANSIZIONE NELL'AMBITO DEL SISTEMA BM

Definito ciò, l'obiettivo che ora ci si propone di raggiungere è quello dell'individuazione e quindi della costruzione di una matrice di transizione tra le classi del sistema Bonus-Malus, la quale contiene appunto le probabilità di passaggio che sono funzione della frequenza di sinistro.

Riprendendo in considerazione $\widetilde{k}_t$, la variabile aleatoria che descrive il numero dei sinistri nell'anno di contratto t e λ la frequenza di sinistro, sia

$$p^*_k(\lambda) = \begin{cases} \text{Prob}(\widetilde{k}_t = k/\Lambda = \lambda) = p_k(\lambda) & se \quad k < K \\ \text{Prob}(\widetilde{k}_t \geq k/\Lambda = \lambda) = \sum\limits_{k=K}^{\infty} p_k(\lambda) & se \quad k \geq K \end{cases}$$

la probabilità di un guidatore con frequenza di sinistro λ, di dar luogo almeno a K sinistri nel suddetto periodo di osservazione e $p_k(\lambda)$ è la probabilità che l'assicurato denunci esattamente k sinistri.

Sulla base di $p^*_k(\lambda)$, ovviamente variabile al variare di k, e sotto l'ipotesi di indipendenza di λ dal tempo, si costruisce la **probabilità di transizione** da una classe all'altra del sistema Bonus-Malus (per esempio dalla i alla j) – per il periodo immediatamente successivo a t – la quale è uguale a:

$$p_{ij}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} p^*_k(\lambda) \cdot t_{ij}^{(k)}$$

Chiaramente sono valide le seguenti:

$$p_{ij}(\lambda) \geq 0 \qquad \text{e} \qquad \sum_i p_{ij}(\lambda) = 1$$

Le m^2 probabilità di transizione – risultato di tutte le possibili combinazioni delle classi i di partenza con le classi j di arrivo (con i,j = 1,2,….,m) e ognuna delle quali è calcolata nella maniera indicata dalla relazione precedente – possono essere sistemate in una matrice M detta **matrice markoviana di transizione**[8]**:**

$$M(\lambda) = [p_{ij}(\lambda)] = \sum_{k=0}^{K} p^*_k(\lambda) \cdot T_k$$

cioè media delle matrici T_k ponderate con le probabilità di sinistro.

Come preannunciato la matrice di transizione è indipendente dal tempo e quindi otteniamo una catena omogenea.

[8] Cfr., Grasso F. (2004).

La matrice delle regole evolutive del sistema BM italiano secondo una rappresentazione alternativa (si veda Lemaire).

Classe i	δ(i)	j(i,0)	j(i,1)	j(i,2)	j(i,3)	j(i,>3)
18	2.00	17	18	18	18	18
17	1.75	16	18	18	18	18
16	1.50	15	18	18	18	18
15	1.30	14	17	18	18	18
14	1.15	13	16	18	18	18
13=ρ	1.00	12	15	18	18	18
12	0.94	11	14	17	18	18
11	0.88	10	13	16	18	18
10	0.82	9	12	15	18	18
9	0.78	8	11	14	17	18
8	0.74	7	10	13	16	18
7	0.70	6	9	12	15	18
6	0.66	5	8	11	14	17
5	0.62	4	7	10	13	16
4	0.59	3	6	9	12	15
3	0.56	2	5	8	11	14
2	0.53	1	4	7	10	13
1	0.50	1	3	6	9	12