1 Flessibilità delle prestazioni

Individuiamo due grandi categorie di intervento sul contratto (che possono coesistere):

1. Variazione delle prestazioni (ed eventualmente dei premi periodici) mediante collegamento ad indicatori economico-finanziari "interni" o "esterni" all'Impresa (rendimento gestione separata, indici azionari, tasso di inflazione)
2. Variazione delle prestazioni in base alla facoltà del contraente di variare, in corso di contratto, il livello dei premi periodici, di sospendere, per un limitato periodo, il pagamento dei premi stessi, di procedere a "prelevamenti" di parte della riserva matematica.

I motivi dell'introduzione della flessibilità delle prestazioni possono essere riassunti nei seguenti punti:

- ***Inflazione***: il debito dell'assicuratore è di **valuta** e non di valore (assicurazioni danni)

- ***Rendimento degli investimenti e tasso tecnico***: la base tecnica adottata nel calcolo dei premi dev'essere favorevole all'assicuratore. La garanzia di tasso pone l'assicuratore in posizione sfavorevole rispetto ad altri operatori finanziari che non devono fornirla. Clausola di partecipazione agli utili.

- ***Partecipazione agli utili dell'assicuratore***: può essere previsto un'eventuale partecipazione anche all'utile demografico o a quello per spese.

- ***Concorrenza sul mercato finanziario***

Questo spiega la creazione di prodotti "innovativi", tra cui indichiamo:

- le polizze “**linked**” (prestazioni legate alle perfomance di fondi di investimento o a indici azionari)

- forme a **premi unici ricorrenti** la prestazione assicurata totale (*S)* dell’assicuratore risulta propriamente definita solo con il pagamento dell’ultimo premio

$$S_h = \frac{U_h}{{}_{n-h+1}E_{x+h-1}}, \qquad h = 1,2..,n \qquad e \qquad S = \sum_{h=1}^{n} S_h$$

- le “**Universal Life**”

- le assicurazioni “**a capitale variabile**”.

1.1 Adeguamento delle prestazioni

In tale ambito consideriamo una costruzione attuariale che consente di rappresentare diversi modelli di flessibilità.

La riserva matematica in un contratto assicurativo garantisce l’equilibrio attuariale in ogni istante tra prestazioni e controprestazioni.

Per il generico istante *t* si ha (prospettivamente):

$$V_t + Premi[t,n] = Prestazioni[t,n]$$

posto il premio annuo

$$P = C\,\frac{A_{x:n}}{\ddot{a}_{x:n}}$$

possiamo riscrivere la relazione di equilibrio:

$$V_t + P \cdot \ddot{a}_{x+t:n-t} = C \cdot A_{x+t:n-t}$$

Ora se il contraente in corso di contratto richiede un incremento di capitale al tasso $j^{(1)}$ e l'assicuratore non effettua revisione della base tecnica, sarà necessaria, ai fini dell'equilibrio attuariale, un'opportuna integrazione delle riserva matematica, in base al tasso $j^{(2)}$, e dei premi, in base al tasso $j^{(3)}$. Si dimostra quindi che:

$$V_t \cdot j^{(2)} + P \cdot j^{(3)} \cdot \ddot{a}_{x+t:n-t} = C \cdot j^{(1)} \cdot A_{x+t:n-t}$$

da cui si ricava che

$$j^{(1)} = \frac{V_t \cdot j^{(2)} + P \cdot j^{(3)} \cdot \ddot{a}_{x+t:n-t}}{C \cdot A_{x+t:n-t}} = \frac{V_t \cdot j^{(2)} + P \cdot j^{(3)} \cdot \ddot{a}_{x+t:n-t}}{V_t + P \cdot \ddot{a}_{x+t:n-t}}$$

media ponderata dei tassi $j^{(2)}$ e $j^{(3)}$

Caso rendita:

$$V_t \cdot j^{(2)} + P \cdot j^{(3)} \cdot \ddot{a}_{x+t:n-t} = R \cdot j^{(1)} \cdot {}_{n-t/}\ddot{a}_{x+t}$$

con $t < n$

$$V_t \cdot j^{(2)} = R \cdot j^{(1)} \cdot \ddot{a}_{x+t}$$

con $t \geq n$

infinite soluzioni, con particolare riferimento alla mista ordinaria, riassumiamo le combinazioni tipiche dei tre tassi:

Modalità	$\mathbf{j^{(1)}}$	$\mathbf{j^{(2)}}$	$\mathbf{j^{(3)}}$	Descrizione
I	*j'*	*j''*	*0*	*Integrazione Immediata a Premio Unico*
II	*j'*	*0*	*j'''*	*Integrazione rateizzata solo sulla durata residua*
III	*j'*	*j'*	*j'*	*Combinazione delle due modalità precedenti*

Alla modalità tre sono riconducibili le tecniche di adeguamento più diffuse.

Adeguamenti ricorrenti

$$C_t = C_1 \prod_{h=1}^{t-1} \left(1 + j_h^{(1)}\right) \qquad P_t = P_1 \prod_{h=1}^{t-1} \left(1 + j_h^{(3)}\right)$$

$$V_t = C_t \cdot A_{x+t:n-t} - P_t \cdot \ddot{a}_{x+t:n-t}$$

adeguamenti di riserva solitamente a carico della Compagnia

$$C'_n = C_n \left(1 + j_n^{(1)}\right) \text{ con } j_n^{(1)} = j_n^{(2)}$$

Tasso tecnico $\hat{i}$ che riporta ad equità l'operazione ricavato implicitamente da:

$$\sum_{t=0}^{n-1} P_{t+1} \cdot {}_t p_x \left(1 + \hat{i}\right)^{-t} = \sum_{t=0}^{n-1} C_{t+1} \cdot {}_{t/1} q_x \left(1 + \hat{i}\right)^{-(t+1)} + C'_n \cdot {}_n p_x \left(1 + \hat{i}\right)^{-n}$$

1.1.1 Assicurazioni indicizzate e rivalutabili

Sono forme assicurative dove l'adeguamento ha carattere ricorrente ed é determinato in forza di alcune clausole contrattuali.
Definiamo:

- **il tasso di inflazione** $s_t = \frac{I(t)}{I(t-1)} - 1$ (parametro esterno)
- **il tasso di incremento della riserva matematica** r_t definito attraverso il **tasso di rendimento degli investimenti a copertura** g_t (parametro interno)

- **l'aliquota di retrocessione** η, $\eta\, g_t$ sarà tale da consentire di far fronte alla garanzia di tasso tecnico i ed all'integrazione della riserva matematica attraverso r_t. Dovrà pertanto essere:

$$(1+i)\cdot(1+r_t) = (1+\eta\cdot g_t) \Longrightarrow r_t = \frac{\eta\cdot g_t - i}{1+i}$$

$$r_t = Max\left\{\frac{\eta\cdot g_t - i}{1+i}, 0\right\}$$

ALCUNI MODELLI

Le assicurazioni **ad indicizzazione completa** prevedono la protezione totale del potere d'acquisto delle somme assicurate ($j^{(1)} = j^{(2)} = j^{(3)} = s$).

Si può definire un'**indicizzazione limitata** superiormente ed inferiormente esprimendo il rendimento del titolo attraverso la funzione *f(s)*:

$$f(s) = \begin{cases} s' & se \quad \alpha\cdot s < s' \\ \alpha\cdot s & se \quad s' \le \alpha\cdot s < s'', \\ s'' & se \quad \alpha\cdot s \ge s'' \end{cases} \qquad 0 < \alpha < 1, \qquad s' > 0$$

alternativamente:

$$j^{(1)} = \phi[f(s), h(s)]; \qquad j^{(2)} = f(s); \qquad j^{(3)} = h(s)$$

con $0 \le h(s) < f(s)$.

Le assicurazioni **rivalutabili** sono tipicamente definite imponendo:

2) $j^{(1)} = j^{(2)} = j^{(3)} = r$;

2a) $j^{(1)} = \varphi(r, \gamma\, r)$, $j^{(2)} = r$, $j^{(3)} = \gamma\, r$, con $0 \leq \gamma < 1$.

Qualora $\gamma = 0$ abbiamo il caso delle assicurazioni **rivalutabili a premio costante**.

Alcuni problemi con i rendimenti minimi garantiti:

$$r_t = \max\left\{\frac{\eta \cdot g_t - i}{1+i}; r_{\min}\right\}$$

Esistono modelli **misti** che combinano le indicizzate e le rivalutabili.

3) $j^{(1)} = s$; $j^{(2)} = r$; $j^{(3)} = \psi(s,r)$;
3a) $j^{(1)} = \alpha s$; $j^{(2)} = r$; $j^{(3)} = \psi(\alpha s,r)$;

4) $j^{(1)} = \varphi(r, s)$; $j^{(2)} = r$; $j^{(3)} = s$;
4a) $j^{(1)} = \varphi(r, \min[r,s])$; $j^{(2)} = r$; $j^{(3)} = \min[r,s]$;
4a) $j^{(1)} = \varphi(r, \max[r,s])$; $j^{(2)} = r$; $j^{(3)} = \max[r,s]$;

Ricordiamo anche la possibilità che nel contratto siano introdotti "periodi di carenza" o "clausole di stabilizzazione".

1.2 Assicurazioni "With Profit"

Nelle assicurazioni with profit, di origine britannica, la somma assicurata è incrementata annualmente (o comunque periodicamente) mediante attribuzione di un importo, detto **bonus**, finanziato dagli utili dell'assicuratore.

Considereremo una mista ordinaria di un assicurato di età x, con capitale assicurato C_1 e premio annuo costante con periodicità pari alla durata del contratto n.

Distinguiamo tra:

- **Reversionary bonus**: valutato e dichiarato annualmente ma esigibile solo a scadenza o al decesso. Le tipologie principali sono:

  in ogni caso $C_{t+1} = C_t + B_t = C_1 + \sum_{h=1}^{t} B_h$

  e $C'_n = C_n + B_n$

  - **bonus semplice**: $B_t = \alpha_t C_1$

    con $C_{t+1} = C_1 + \sum_{h=1}^{t} B_h = C_1\left(1 + \sum_{h=1}^{t} \alpha_h\right)$

  - **bonus composto**: $B_t = \beta_t C_t$, con $C_t = C_{t-1} + B_{t-1}$

  - **bonus supercomposto**: $B_t = \gamma_t \cdot C_1 + \delta_t \cdot \sum_{h=1}^{t-1} B_h$

  - **bonus garantito**: è previsto un livello minimo di bonus $\overline{B}_t$, a cui fa fronte un caricamento aggiuntivo in ambito di tariffazione.

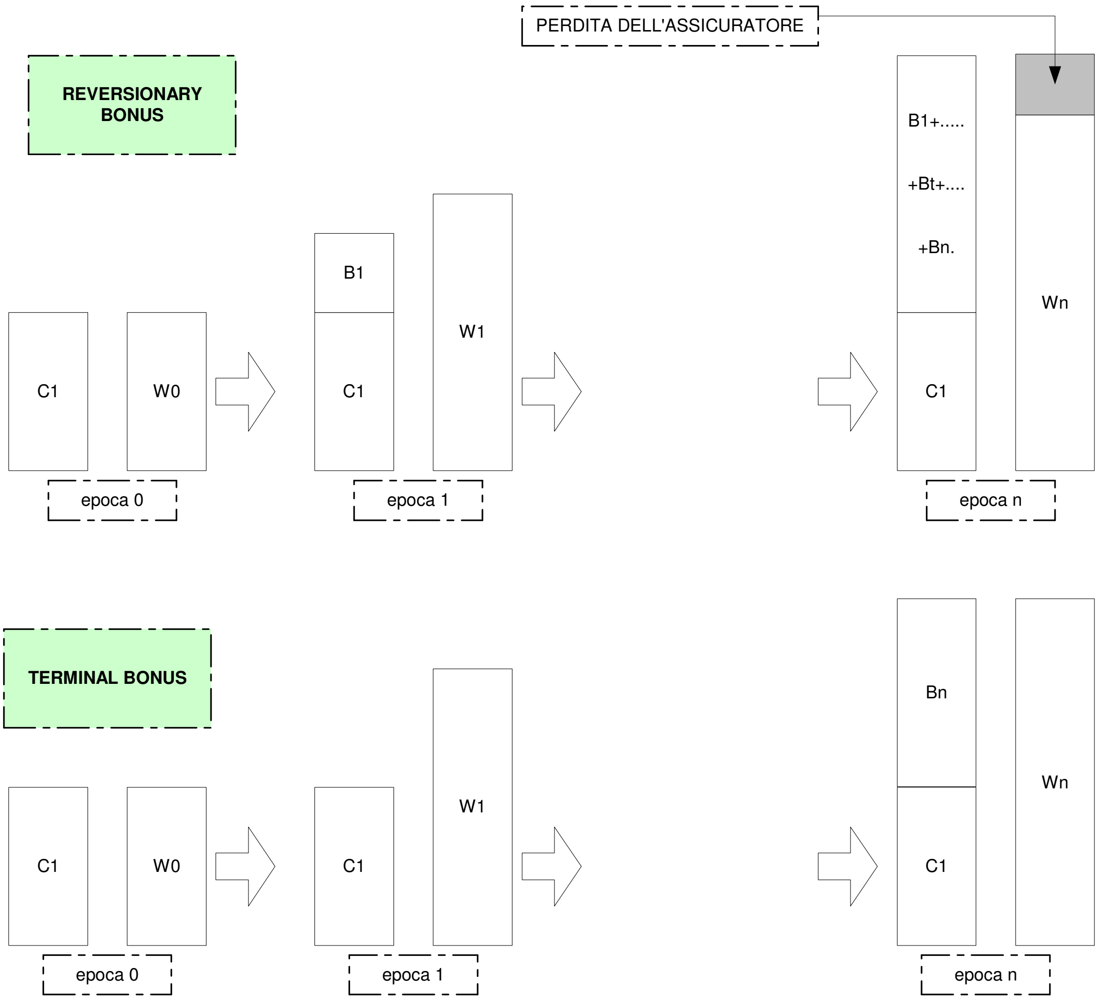
$$U = C_1 \cdot {}_1A_x + \sum_{t=1}^{n-1}\left(C_1 + \sum_{h=1}^{t} \overline{B}_h \right)_{t/1}A_x + \left(C_1 + \sum_{h=1}^{n} \overline{B}_h \right)_n E_x$$

- **Terminal bonus**: valutato annualmente, ma assegnato definitivamente al contratto solo a scadenza o al decesso. Le relazioni sono:

  - **In corso di contratto**: $\hat{C}_{t+1} = C_1 + \hat{B}_t^{(T)}$ (valore informativo ma non definitivo)

- **A scadenza**: $C_n = C_1 + B_n^{(T)}$ (valore definitivo)

Di seguito riportiamo graficamente le logiche sottostanti i due approcci.



<u>Riserve matematiche</u>
<u>(caso revisionary bonus senza bonus garantito)</u>

Sono in uso due diversi approcci per la valutazione della riserva matematica <u>prospettiva</u>.

1) **Approccio tradizionale** = nel calcolo della riserva si tengono conto solo dei bonus assegnati fino a t (inclusa)

$$V_t = C_{t+1} A_{x+t,n-t} - P \cdot \ddot{a}_{x+t,n-t}$$

2) **Precomputo dei Bonus futuri** = si tiene conto dei bonus sia assegnati fino a t (inclusa) sia dei bonus dichiarati in futuro (necessità quindi di stimare l'andamento futuro del mercato finanziario che consenta dei margini rispetto al tasso tecnico i).i'>i

$$V_t = C_{t+1} \cdot {}_1A'_{x+t} + \sum_{k=1}^{n-t-1} \left(C_{t+1} + \sum_{h=1}^{k} \tilde{B}_{t+h} \right)_{k/1} A'_{x+t} +$$

$$+ \left(C_{t+1} + \sum_{h=1}^{n-t} \tilde{B}_{t+h} \right)_{n-t} E'_{x+t} - P \cdot \ddot{a}'_{x+t,n-t}$$

<u>Sussiste una stretta analogia tra assicurazioni rivalutabili (a premio costante) e with profit</u>.

1.3 Assicurazioni "Unit Linked"

Le unit linked sono caratterizzate da prestazioni espresse in termini di unità (o parti o quote) di un fondo di investimento (insieme di titoli azionari, obbligazionari o di debito pubblico e di altri beni fruttiferi).
In tale ambito vengono attuati investimenti a copertura delle riserve atti ad agganciare le prestazioni al valore delle unità di conto prescelte.
Ai fini espositivi consideremo esclusivamente fondi a *capitalizzazione e non a distribuzione* costituiti da beni mobiliari.

In tal caso il valore delle unità, w_t, varia nel tempo per effetto del reinvestimento di interessi e dividendi e delle variazioni dei valori di mercato dei titoli. Se poniamo con z_t il tasso di rivalutazione delle unità nell'anno (t-1,t), allora il valore dell'unità all'epoca t è:

$$w_t = (1 + z_t) \cdot w_{t-1}$$

dove z_t può essere minore, uguale o maggiore di zero.

Le forme assicurative di questo tipo sono così raggruppabili:

Modello	**Nome**	**Unità monetarie**	**Unità del fondo**
1	**Benjamin** tipo 1	Premi e Capitale caso morte	Capitale caso vita
2	**Benjamin** tipo 2	Premi e parte del Capitale caso morte	Capitale caso vita e parte del Capitale caso morte
3	**Britannico** e **Francese**	Premi	Capitale caso vita e Capitale caso morte
4			Premi, Capitale caso vita e Capitale caso morte

Se le prestazioni sono espresse in unità del fondo il rischio finanziario grava sull'assicurato, a meno di garanzie di minimo.

Nei modelli (1) e (2) il premio annuo è scomponibile in due componenti:

- **unit part**: con cui si procede all'acquisto di unità del fondo;
- **sterling part**: con cui viene finanziata la copertura caso morte e le spese.

La ripartizione è definita in base alla struttura contrattuale (nel modello 4 ovviamente la sterling part è nulla).

Modello n° 1 - Benjamin tipo 1

Il premio pagato alla generica epoca *t* è prefissato e costante:

$$P = P'_{t+1} + P''_{t+1}$$

di cui la prima parte finanzia la prestazione caso vita (in unità) e la seconda quella caso morte.

In particolare il primo è un premio unico *ricorrente* (i=0 poiché l'interesse corrisposto dipende solo dall'andamento del fondo, nessuna garanzia di tasso):

$$P'_{t+1} = m_t \cdot w_t \cdot {}_{n-t}E_{x+t} = m_t \cdot w_t \cdot {}_{n-t}p_{x+t} = S_{t,t} \cdot {}_{n-t}p_{x+t}$$

Dove

$$S_{t,t} = m_t w_t$$

$$S_{t,n} = m_t w_n = m_t w_t \prod_{h=t+1}^{n} (1 + z_h) = S_{t,t} \prod_{h=t+1}^{n} (1 + z_h)$$

e

$$S=\sum_{t=0}^{n-1} S_{t,n}=\sum_{t=0}^{n-1} m_t w_n = M_{n-1} w_n$$

ponendo $M_t=\sum_{h=0}^{t} m_h$

La riserva per la prestazione caso vita sarà data da

$$\mathrm{V'}_{\mathrm{t}}=\left(\sum_{h=0}^{t-1} S_{h,t}\right)\cdot {}_{n-t}p_{x+t}=M_{t-1}\cdot w_t\cdot {}_{n-t}p_{x+t}$$

(si noti che rappresenta il valore attuariale o atteso delle unità già attribuite al contratto)

$$V'_{t+1}=M_t\cdot w_t\left(1+z_{t+1}\right)\cdot {}_{n-t-1}p_{x+t+1}$$

da cui

$$V'_{t+1}\cdot p_{x+t}=\left(M_{t-1}\cdot w_t\cdot {}_{n-t}p_{x+t}+m_t\cdot w_t\cdot {}_{n-t}p_{x+t}\right)\left(1+z_{t+1}\right)$$

ovvero

$$V'_{t+1}\cdot p_{x+t}=\left(V'_t+P'_{t+1}\right)\left(1+z_{t+1}\right)$$

La **Sterling Part** è ricavata attraverso la relazione di equità (da cui ricavare anche la riserva matematica):

$$\sum_{\mathrm{t=0}}^{\mathrm{n-1}} \mathrm{P''}_{\mathrm{t+1}}\ {}_{t}E_x=C\cdot {}_{n}A_x$$

da cui

$$V_t'' = C \cdot {}_{n-t}A_{x+t} - \sum_{\mathrm{h=0}}^{\mathrm{n-t-1}} \mathrm{P}''_{\mathrm{t+h+1}} \ {}_{h}E_{x+t}$$

a fronte di cui si effettueranno investimenti tradizionali

Tasso tecnico diverso da zero

$$\mathrm{P}'_{\mathrm{t+1}} = m_t \cdot \overline{w}_t \cdot {}_{n-t}E_{x+t} = m_t \cdot \overline{w}_t \cdot {}_{n-t}p_{x+t} \cdot (1+i)^{-(n-t)}$$

(diversa valorizzazione delle quote e non diverso numero)

$\overline{w}_t = w_t (1+i)^{n-t}$ e $\overline{w}_n = w_n$ (uguaglianza delle prestazioni a scadenza) da cui:

$$\overline{w}_t \prod_{h=t+1}^{n} (1+\overline{z}_h) = w_t (1+i)^{n-t} \prod_{h=t+1}^{n} (1+\overline{z}_h) = w_t \prod_{h=t+1}^{n} (1+z_h)$$

da cui

$$\prod_{h=t+1}^{n} (1+\overline{z}_h) = \prod_{h=t+1}^{n} \frac{(1+z_h)}{(1+i)} \quad \text{ossia} \quad \overline{z}_h = \frac{(z_h - i)}{(1+i)}$$

Modello n° 2 - Benjamin tipo 2 (pag. 401)

In questo caso la prestazione caso morte è:

C_{t+1} = $C_{\text{prefissato}}$ + rivalutazione delle Unit Part
= $C_{\text{prefissato}}$ + valore unità al tempo t +1 – somme assicurate <u>caso vita</u> con le unit part fino a t

$$C_{t+1} = C + M_t \cdot w_{t+1} - \sum_{h=0}^{t} m_h \cdot w_h = C + \sum_{h=0}^{t} (S_{h,t+1} - S_{h,h})$$

Ipotizzando, ai fini della scomposizione del premio, di utilizzare lo stesso tasso tecnico i, la unit part è il premio unico (per ogni t) di una mista semplice di capitale $S_{t,t} = m_t \cdot w_t$ con $\sum_{t=0}^{t=n-1} S_{t,t} \leq C$:

$$P'_{t+1} = S_{t,t} \cdot A_{x+t,n-t}$$

mentre la sterling part sarà (in base a quanto indicato per C_{t+1}) calcolata come un premio naturale di una copertura caso morte a capitale variabile:

$$P''_{t+1} = \left(C - \sum_{h=0}^{t} S_{h,h} \right)_{/1} A_{x+t}$$

$$\sum_{t=0}^{n-1} \left(P'_{t+1} + P''_{t+1} \right)_t E_x = \sum_{t=0}^{n-1} \left[S_{t,t} \cdot A_{x+t,n-t} + \left(C - \sum_{h=0}^{t} S_{h,h} \right)_{/1} A_{x+t} \right]_t E_x$$

$$P \cdot \ddot{a}_{x:n} = C_{/n}A_x + \left(\sum_{t=0}^{n-1} S_{t,t} \right)_n E_x$$

La riserva matematica è quindi data da:

$$V'_t = M_{t-1} \cdot w_t \cdot A_{x+t,n-t} = \left(\sum_{h=0}^{t-1} S_{h,t} \right) \cdot A_{x+t,n-t}$$

$$V''_t = 0$$

(NB caso morte a premio naturale

Modello n° 3 - Britannico

Il premio P_{t+1} è interamente impiegato per acquistare unità del fondo.

Indicando con k_t il numero di unità acquistate avremo:

$P_{t+1} = k_t\, w_t$ (non interviene alcun fattore demografico o finanziario)

Qualora la prestazione caso morte fosse pari al valore di quote acquistate fino al decesso non sarebbe presente alcun rischio demografico.
Nel caso di un capitale superiore al valore delle quote emerge un rischio demografico (consumo di unità).
Se N_t numero di unità attribuite al contratto fino a t, $v_t>0$ aliquota di maggiorazione delle prestazioni caso morte. Ad esempio:

$$C_{t+1} = \max\{C, (1+v_t)\cdot(N_t + k_t)\cdot w_{t+1}\}$$

oppure

$$C_{t+1} = \max\{H, (1+v_t)\cdot(N_t + k_t)\}\cdot w_{t+1}$$

dove *C* è un capitale espresso in termini monetari (comportando un rischio finanziario a causa del delta tra C e il valore aleatorio) e *H* è invece un numero minimo di quote (che comporta una semplificazione della struttura tecnica in quanto il valore delle unità interviene solo al momento, eventuale, del pagamento).

In riferimento allo schema con *H* la relazione di equilibrio è:

$$N_t + k_t = N_{t+1}\cdot p_{x+t} + \max\{H, (1+v_t)\cdot(N_t + k_t)\}\cdot q_{x+t}$$

da cui si ricava, posto $N_0 = 0$, per via ricorrente, i successivi valori di N_t.

Il capitale sotto rischio in termini di unità si ricava da:

$$N_t + k_t = N_{t+1} + \left[\max\{H, (1+v_t)\cdot(N_t + k_t)\} - N_{t+1}\right]\cdot q_{x+t}$$

La riserva matematica sarà:

$$V_t = N_t \; w_t$$

Infatti la prestazione caso morte è finanziata a premio naturale.

Modello n° 3 - Francese

Tale modello prevede:
- una <u>prestazione in caso vita</u> a scadenza data dal valore delle unita attribuite al contratto
- una <u>prestazione caso morte</u> in (t,t+1) pari a

$$C_{t+1} = \max[\text{somma premi puri versati; valore delle unità}]$$

Il premio annuo è prefissato

$$P_{t+1} = (1 + \alpha)^t \, P$$

e viene suddiviso in

1)Unit part

$$P'_{t+1} = (1 - \xi)\, P_{t+1} = k_t \, w_t$$

2) Sterling part

$$P''_{t+1} = \xi \;\; P_{t+1}$$

(aliquota in funzione della durata (e dell'età media di ingresso in assicurazione) e non dell'età)
Come si <u>**vede non interviene alcun fattore demografico**</u>, perché le unità acquistate determinano sia la prestazione caso morte che quella in caso vita.

Modello Assicurazioni unitised with profit

E' una forma "mista". Si distinguono dalle unit linked perché il valore delle unità è determinato dall'assicuratore, anziché dal gestore, tenendo conto, però dei rendimenti dei titoli nei quali investe le riserve e delle quotazioni dei titoli stessi (z_t) ed introducendo un tasso di rivalutazione del tipo:

$$y_t = \max[z_t, y_{\text{min garantito}}]$$

Il valore delle unità è incrementato mediante il riconoscimento di bonus e, a volte, di terminal bonus.

Sono molto simili alle assicurazioni with profit, ma dilazionano nel tempo i bonus, in quanto commisurati alla riserva matematica, mentre nelle with profit sono legati alla prestazione. Nelle prime si avrà una maturazione del bonus più lenta, nelle seconde si partirà subito da valori elevati.

Rischio finanziario e garanzie di minima prestazione

L'espressione delle prestazioni in quote di un fondo comporta un rischio finanziario in capo all'assicurato. Esistono possibilità di trasferimento di parte di esso all'assicuratore tramite contratti **open-ended**, ma sopratutto attraverso una **garanzia di minimo**, o in merito al solo capitale a scadenza (**maturity guarantee**), o al solo capitale caso morte (**death benefit guarantee**), o entrambe.
Garanzie che possono esser *esogene*, attraverso un C minimo, o *endogene,*utilizzando la somma dei premi pagati.

A fronte dell'assunzione di rischio finanziario da parte dell'assicuratore sarà necessario ricevere un adeguato premio.
A differenza di quello demografico qualificato come **pooling risk** (può "godere" di un effetto di compensazione tanto più quanto la collettività è estesa), quello finanziario è un **non-pooling risk**, cioè comporta uguale effetto per tutti i contratti in portafoglio.

Esempio di "maturity guarantee"
Capitale differito su testa x, durata n, a premio unico.

$m \cdot {}_n p_x$ numero di nità acquistate in 0.

A scadenza, se non c'è garanzia di minimo, in caso vita si avrà un capitale

$$S = m \cdot w_n = m \cdot w_0 \cdot \prod_{t=1}^{n} (1 + z_t)$$

Fissiamo un minimo G dato da:

$$G = m \cdot w_0 (1 + r)^n$$

per cui

$$S = \max\{G, m \cdot w_n\}$$

La riserva iniziale sarà:

$$V_{0+} = S \prod_{h=1}^{n} (1 + z_h)^{-1} \cdot {}_n p_x =$$

$$= \max\left\{ m \cdot w_0 (1 + r)^n \prod_{h=1}^{n} (1 + z_h)^{-1}, m \cdot w_0 \right\} \cdot {}_n p_x =$$

$$= m \cdot w_0 \cdot {}_n p_x + m \cdot w_0 \cdot \max\left\{ (1 + r)^n \prod_{h=1}^{n} (1 + z_h)^{-1} - 1, 0 \right\} \cdot {}_n p_x$$

(NB è aleatoria) (il secondo addendo è il costo della garanzia di minimo)

La riserva in t sarà:

$$V_t = S \prod_{h=t+1}^{n} (1 + z_h)^{-1} \cdot {}_{n-t} p_{x+t} =$$

$$= m \cdot w_t \cdot {}_{n-t} p_{x+t} + m \cdot w_t \cdot \max\left\{ (1 + r)^n \prod_{h=1}^{n} (1 + z_h)^{-1} - 1, 0 \right\} \cdot {}_{n-t} p_{x+t}$$

La gestione del rischio finanziario è compito dell'assicuratore.

Trascurando la componente demografica per motivi di semplicità, il contratto è assimilabile ad un'operazione puramente finanziaria. Posto *m* il numero di unità acquistate, la garanzia di minimo per la prestazione a scadenza S è rappresentabile come:

$$S = \max\{G, m \cdot w_n\} =$$
$$= G + \max\{0, m \cdot w_n - G\} =$$
$$= m \cdot w_n + \max\{G - m \cdot w_n, 0\}$$

con $G = m \cdot w_0 (1 + r)^n$

Si noti come la posizione dell'assicurato coincide dunque con quella di chi detiene un portafoglio di m unità del fondo di investimento e da un ugual numero di opzioni put europee sul fondo stesso esercitabili in *n* al prezzo d'esercizio K = G/m.

$$m \cdot w_n + \max\{G - m \cdot w_n, 0\} = m \cdot w_n + m \cdot \max\{K - w_n, 0\}$$

oppure, con la scomposizione call, G ZCB unitari e m opzioni call europee esercitabili in *n* sempre con prezzo d'esercizio K = G/m.:

$$G + \max\{0, m \cdot w_n - G\} = G + m \cdot \max\{0, w_n - K\}$$

Necessari spesso investimenti replicanti e tecniche di portfolio insurance.

Esempi di "death benefit guarantee"
Rischio finanziarie e demografico combinati
Caso a parte quello del modello di Benjamin di primo tipo, trattabile con modelli attuariali tradizionali.

In assenza di garanzie $C_{t+1} = V_{t+1} = N_t \cdot w_t$

In presenza di garanzie $C_{t+1} = \max\{G_{t+1,} V_{t+1}\}$

Già vista nel modello britannico una "garanzia esogena" ($G_{t+1} = C$)

Già vista nel modello francese una "garanzia endogena" ($G_{t+1} = \sum_{h=1}^{t+1} P_h$)

Garanzia ratchet

$$G_{t+1} = \max_{0 \le h \le t} \{V_h\}$$

percui si avrà $C_{t+1} = \max_{0 \le h \le t+1} \{V_h\}$

Anche le garanzie di minimo sulle prestazioni caso morte richiedono la valutazione dei costi per l'assicuratore. Se assumiamo deterministico il n numero dei decessi annui si può affrontare il problema in modo analogo alla quello legato alla garanzia di minimo a scadenza.

1.4 Interazioni tra riserva matematica ed investimenti in assicurazioni a prestazioni flessibili

Dalle definizione delle prestazioni nelle varie forme assicurative possiamo evidenziare le seguenti interazioni tra riserve (futuri impegni netti dell'assicuratore) e investimenti a copertura:

- **forme tradizionali (a prestazioni non flessibili)**: l'entità della riserva definisce gli investimenti a copertura necessari

- **forme rivalutabili**: come al punto precedente, ma a causa del meccanismo di retrocessione gli investimenti agiscono sull'impegno netto dell'assicuratore

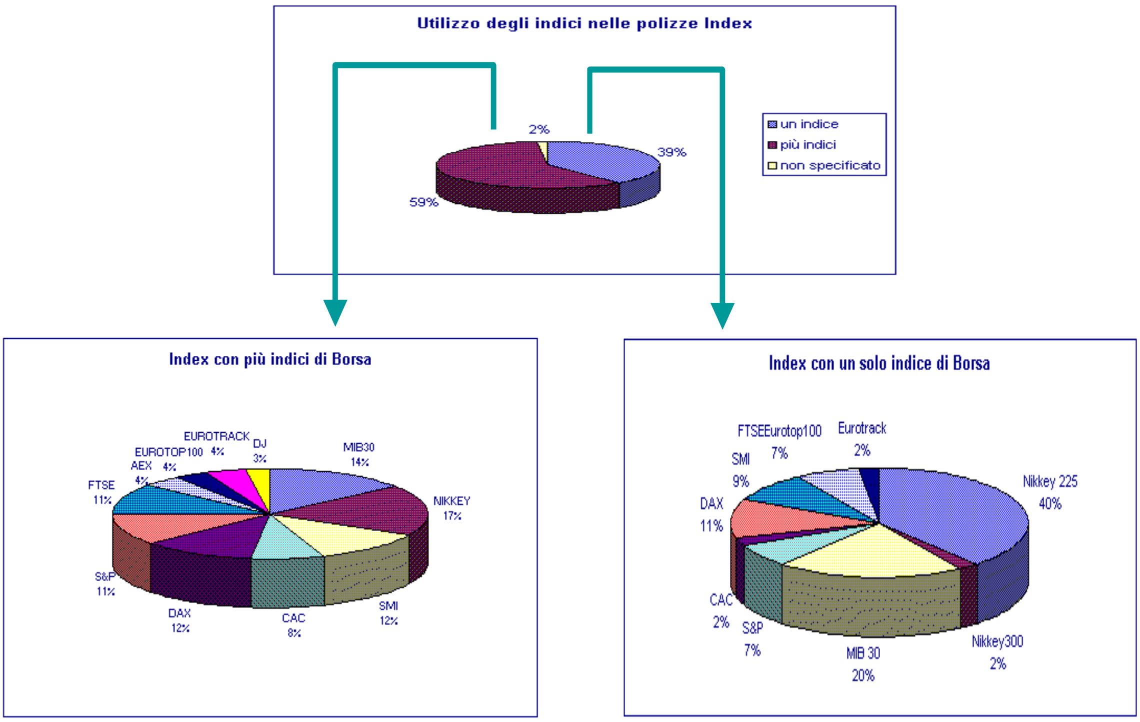
- **forme unit linked senza garanzie di minimo (ma vale anche per le index-linked)**: viene completamente invertito il processo logico rispetto alle forme non flessibili, in quanto è il valore delle unità a definire la riserva matematica o **forme unit linked con garanzie di minimo (ma vale anche per le index-linked)**: la garanzia di minimo comporta un impegno ulteriore e quindi incide sul tipo e l'entità degli investimenti.

Le prime due sono dette **liability driven**, mentre le restanti **asset driven** in base a quanto evidenziato.

1.5 Index Linked

Le assicurazioni Index Linked sono forme assicurative del tipo miste o a capitale differito, tipicamente a premio unico, (di durata 5-10 anni), in cui le prestazioni sono legate all'andamento di uno o più indici di riferimento (indice dei prezzi, o quelli che esprimono il valore dei metalli preziosi o l'andamento dei mercati finanziari).

Nel prosieguo considereremo solo forme legate a indici di Borsa (azionari) che devono avere una base sufficientemente ampia, al fine di evitare oscillazioni dovute alla presenza di un ristretto numero di titoli (ricordiamo che possono essere utilizzati indici *generali*, *specifici*, *di settore* o *globali*).



Dato il legame con indici azionari è tipicamente prevista una garanzia di minimo, in genere riferita al premio U versato dal contraente.
Possiamo distinguere

1 **assicurazioni index-linked pure**: con nessuna garanzia di minimo

2 **assicurazioni index-linked con garanzia**: è garantito il capitale $\gamma \cdot U$ con $\gamma > 0$.
   - 2.a **index-linked con garanzia parziale**: $0 < \gamma < 1$
   - 2.b **index-linked con garanzia di capitale:** $\gamma = 1$
   - 2.c **index con garanzia di capitale e interessi:** $\gamma > 1$

$$\gamma \cdot U = U \cdot (1+r)^n$$ dove r è il tasso garantito.

Ci concentreremo sulle ultime due e ipotizzeremo he la prestazione sia demograficamente certa.

Indicando con n la durata contrattuale, con I_t il livello dell'indice di riferimento all'epoca t, la **prestazione a scadenza** potrà essere espressa da:

$$S = \max\{U \cdot \gamma, U \cdot \Phi(I_0, I_1, ..., I_n)\}$$
$$= U \cdot \max\{\cdot \gamma, \cdot \Phi(I_0, I_1, ..., I_n)\}$$

dove la funzione Φ indica un generico "riassunto" dell'andamento dell'indice e definisce la partecipazione alla performance dell'indice stesso.

Indicato con

$$g_t = \frac{I_t}{I_{t-1}} - 1$$

il tasso di variazione dell'indice nel t-esimo anno di contratto, porremo:

$$j_t = \begin{cases} 0 & se \quad g_t \leq 0 \\ g_t & se \quad 0 < g_t < g' \\ g' & se \quad g_t \geq g' \end{cases}$$

come tasso di variazione considerato nella funzione Φ (vengono fissati limiti inferiori e superiori).
Consideriamo diversi esempi di Φ e γ (che definiscono completamente la prestazione a scadenza).

a) Partecipazione Integrale

$$\Phi(I_0, I_1, \ldots, I_n) = \prod_{t=1}^{n} (1 + g_t) = \frac{I_n}{I_0}$$

Logicamente potrebbe risultare negativa. In tal caso agisce la garanzia di minimo. Nessun "tetto" per il guadagno negli *n* anni.

b) Cliquet

$$\Phi(I_0, I_1, \ldots, I_n) = \alpha \cdot \prod_{t=1}^{n} (1 + j_t)$$

La garanzia cliquet comporta un consolidamento delle posizioni raggiunte. Agisce una garanzia di minimo, attraverso γ e j_t, e il "tetto" *g'*.
α è l'aliquota di partecipazione (anche >1, amplificazione).
Il massimo valore della prestazione è $U\,\alpha\,(1+g')^n$.

c) Partecipazione Additiva

$$\Phi(I_0, I_1, \ldots, I_n) = 1 + \alpha \cdot \sum_{t=1}^{n} j_t$$

In tale modalità le variazioni positive dell'indice sono trasferite in modo additivo.
Il massimo valore è $U\,(1+\alpha\, n\, g')$.

d) Variazione media (Average Price)

$$\Phi(I_0, I_1, ..., I_n) = 1 + \alpha \cdot \max\left\{\frac{I_{medio} - I_0}{I_0}; 0\right\} + \beta$$

in cui I_{medio} è una media dei valori assunti dall'indice di riferimento nell'arco di tempo n, ad esempio:

$$I_{medio} = \frac{1}{n+1}\sum_{t=0}^{n} I_t$$

Il parametro β consente una rivalutazione di base dell'importo *U*.
E' utilizzata per mettersi al riparo da eventuali cadute dell'indice di riferimento in prossimità della scadenza.

e) Rung

Posto $\rho_0 = 1$ e si fissino gli *m* parametri $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$, con $\rho_0 < \rho_1 < \rho_2 < \ldots < \rho_m$ e, ad es., $\rho_m = 2$, allora si definisce:

$$I_{Rung} = \max_k \left\{\rho_k I_0 \middle| I_t \geq \rho_k I_0 \quad per\, almeno \cdot un \quad t, \quad 1 \leq t \leq n\right\}$$

e

$$\Phi(I_0, I_1, ..., I_n) = \max\left\{\frac{I_{Rung}}{I_0}; \frac{I_n}{I_0}\right\}$$

In tal modo è possibile consolidare il "gradino" più alto, fra quelli specificati dai parametri ρ_k, raggiunto dall'indice sull'intera durata contrattuale.
Tale modello è molto utile in presenza di ampie oscillazioni dell'indice.

f) Ladder

Fissato un intervallo di riferimento, ad l'anno, si indichi con I_s, il livello assunto dall'indice nel generico istante s, e si ponga:

$$f_t = \max_{t-1 \le s \le t} \left\{ \frac{I_s}{I_{t-1}} - 1 \right\}$$

<u>In tal modo si consolida anno per anno il massimo valore raggiunto dall'indice nell'anno stesso</u>. La prestazione a scadenza non è solo funzione della sequenza I_0, …, I_n, ma dei valori I_s con $0 \le s \le n$, dunque di una funzione $\Psi(I_s, 0 \le s \le n)$ in luogo della $\Phi(I_0, I_1, ..., I_n)$.
Si ponga, ad esempio:

$$h_t = \begin{cases} f_t & se \quad 0 \le f_t \le f' \\ f' & se \quad f_t > f' \end{cases}$$

con un fissato tetto f'. Si potrà adottare una modalità additiva:

$$\Psi(I_s, 0 \le s \le n) = 1 + \alpha \cdot \sum_{t=1}^{n} h_t$$

La **struttura finanziaria** necessaria a sostenere la prestazione a scadenza $S = \max\{U \cdot \gamma, U \cdot \Phi(I_0, I_1, ..., I_n)\}$ deve essere tale da fornire sia la garanzia di minimo che la rivalutazione dell'indice (opzione). Si supponga che il premio unico U sia suddiviso in due parti:

U = U' + U''

U' consente all'assicuratore di acquistare uno ZCB, con scadenza n e valore a scadenza $U \ \gamma$, allo scopo di finanziare la garanzia di minimo, $U' = U \cdot \gamma (1+z)^{-n}$.
Perché U'<U deve essere $\gamma < (1+z)^{-n}$.

U” viene utilizzato per acquistare opzioni sull’indice che consentono di ottenere a scadenza il guadagno definito attraverso la Φ (o la Ψ) adottata.
E’ovvio che le scelte di γ e Φ sono strettamente correlate (si può privilegiare il rendimento certo o l’aspetto speculativo).

Nella pratica assicurativa le index sono progettate sulla scorta di prodotti finanziari già esistenti (titoli **strutturati** detti **index-bond**) consistenti in ZCB legati ad indici di borsa (con legame specificato attraverso Φ) e includenti garanzie di minimo (specificate attraverso γ).
Il ricorso a tali prodotti rende comprensibile il motivo che le forme assicurative index linked siano a premio unico (a volte a premio ricorrente):

- il progressivo introito di premi renderebbe necessario di disporre alle varie scadenze di analoghi titoli

- le index linked devono avere la stessa durata degli index bond (in genere 5-10 anni)

- devono essere stipulate al momento dell’emissione da parte dell’intermediario finanziario

- l’entità del capitale assicurato è vincolata ai tagli degli index bond

Negli *esempi* riportati sul Pitacco emerge che, a fronte di tre scenari dell’andamento dell’indice (crescente, fortemente crescente e decrescente), le varie modalità di partecipazione comportano prestazioni sensibilmente diverse. Si intende che una non è peggiore dell’altra, perché una prestazione inferiore si traduce in premio U” più basso e quindi maggiori disponibilità di U’ per acquistare lo ZCB e quindi fornire garanzie di minimo più elevate (in genere la cliquet è quella che risulta più immune ad andamenti negativi dell’indice, la rung segue molto l’andamento del sottostante mentre la media fornisce risultati abbastanza costanti al variare degli scenari).

La **struttura assicurativa** può essere rappresenta attraverso due esempi.
Sia S rappresentata dalla

$$S = \max\{U \cdot \gamma, U \cdot \Phi(I_0, I_1, ..., I_n)\}$$

$$= U \cdot \max\{\cdot \gamma, \cdot \Phi(I_0, I_1, ..., I_n)\}$$

W_t sia il valore dell'index bond in t, dipendente dalla perfomance dell'indice fino all'epoca t attraverso la funzione Φ; risulta ovviamente $W_n = S$.

Consideriamo **il primo caso** in cui il capitale caso morte sia definito come pagamento di *S* a scadenza o W_t in t+1.
In tal caso non vi è rischio demografico e quindi la riserva matematica in t è pari a W_t.

Il ***secondo*** **caso**, fermo restando *S*, prevede come prestazione caso morte il capitale prefissato C pagabile alla fine dell'anno di decesso e quindi non legata con l'indice.
E' necessario scomporre il premio in tre parti.
La prima finanzia la garanzia in caso di vita a scadenza, fornita dallo ZCB:

- $U' = U\,\gamma(1+z)^{-n}\,{}_np_x$

La terza rappresenta il premio unico di TCM a capitale costante, con tasso tecnico *i*:

- $U''' = C\,{}_nA_x$

La seconda

- $U'' = U - U' - U'''$

consente di acquistare opzioni sull'indice di riferimento, per agganciare la prestazione al guadagno definito da Φ.
Ovviamente vi deve essere compatibilità tra garanzia, γ, funzione *Φ* e capitale *C*.
La riserva matematica sarà:

$$V_t = W_t \cdot {}_{n-t}p_{x+t} + C \cdot {}_{n-t}A_{x+t}$$

con W_t valore dell'index-bond in *t*.

Le differenze rispetto ad altre tipologie contrattuali

Appare utile analizzare i differenti profili delle polizze "linked" rispetto a tipologie contrattuali apparentemente simili, al fine di percepire i motivi del differente trattamento disciplinare.

Le tradizionali polizze a prestazioni rivalutabili, a prescindere dalle diverse forme tecniche che possono assumere, sono caratterizzati dal fatto che l'accrescimento delle prestazioni, in un'ottica esclusivamente finanziaria, è determinato periodicamente sulla base di tassi di rendimento, dipendenti dai risultati di gestione di appositi fondi separati dal portafoglio dell'impresa.
Si tratta quindi di accrescimenti variabili di periodo in periodo e operati sulla base di risultati già conseguiti e definitivamente assegnati, secondo il cosiddetto meccanismo di "consolidamento" della prestazione. A tale modalità di accrescimento delle prestazioni è accompagnata di solito anche la garanzia di un tasso minimo di rendimento.
Anche queste polizze, quindi, finiscono per essere caratterizzate da prestazioni variabili, non conosciute dall'assicurato al momento della sottoscrizione, tanto da poter asserire che questi assuma in qualche modo un rischio di investimento.

Sono netti però i profili di differenziazione con le polizze "linked". <u>In queste ultime, innanzi tutto, l'accrescimento delle prestazioni non dipende da tassi di rendimento periodici, ma dal valore corrente dell'entità di riferimento</u>. In particolare, non si tratta di tassi di rendimento determinati a posteriori sulla base dei risultati conseguiti, ma di variazioni di valore desunte dall'andamento corrente dei mercati di riferimento. Infine, nelle polizze "linked" non si hanno di norma accrescimenti delle prestazioni assegnati in via definitiva.
Tra l'altro, occorre sottolineare che, mentre la variazione di valore dell'entità di riferimento che determina il rendimento delle polizze "linked" è calcolata sulla base delle determinazioni di valori di mercato, nelle polizze rivalutabili i tassi di rendimento, periodicamente calcolati ai fini dell'attribuzione delle *performance* agli assicurati, poco hanno a che fare con valutazioni di mercato, dipendendo da particolari criteri contabili di valutazione.
Solo nelle polizze "linked", in conclusione, si può dire che l'assicurato sopporti il rischio dell'investimento; rischio che si concretizza mediante la diretta dipendenza delle prestazioni dal valore corrente dell'unità di conto presa a riferimento.

1.6 Assicurazioni a capitale variabile

Le forme di questo tipo consentono una combinazione delle due modalità di flessibilità viste al paragrafo 1.
Il modello attuariale sottostante è il New York Life Model e la forma è tipicamente a *Vita Intera*, ma facilmente estensibile anche ad altre coperture assicurative come le miste.

New York Life Model – assicurazioni rivalutabili (cenni)

Consideriamo un'assicurazione Vita Intera con capitale C prefissato costante e premio annuo vitalizio $P = C\frac{A_x}{\ddot{a}_x}$ prefissato costante, calcolato al tasso tecnico *i*. Attraverso la relazione di equilibrio espressa in via ricorrente dall'equazione di Kanner:

$$\left(C \cdot V_t + P\right) \cdot \left(1 + i\right) = C\left[\left(1 - V_{t+1}\right) \cdot q_{x+t} + V_{t+1}\right]$$

e ipotizzando che nei successivi anni sia pagata una sequenza di premi diversi da P e calcolati non in base a *i*, ma al tasso ηg_t, non garantito, dipendente dal rendimento degli investimenti (come per le polizze rivalutabili), posto $C_0 = C$, per la generica epoca t si ottiene:

$$\left(C_t \cdot V_t + P_{t+1}\right) \cdot \left(1 + i\right) \cdot \left(1 + r_{t+1}\right) = C_{t+1}\left[\left(1 - V_{t+1}\right) \cdot q_{x+t} + V_{t+1}\right]$$

e con semplici passaggi

$$C_{t+1} = C_t \cdot \left(1 + r_{t+1}\right)\frac{V_t + \frac{P_{t+1}}{C_t}}{V_t + \frac{P}{C}} = C_t \cdot \alpha_{t+1} \cdot \beta_{t+1}.$$

Abbiamo due fattori di *adeguamento* del capitale assicurato:

- α_{t+1} : esprime l'effetto del rendimento riconosciuto in relazione al tasso di preconto i (flessibilità 2); si noti che può essere $\eta g_t < i$ dato che l'assenza di garanzia di tasso.
- β_{t+1} : esprime l'adeguamento del capitale al livello di premio (flessibilità 1).

New York Life Model – assicurazione unit linked

La prestazione é espressa in termini di unità di un fondo di investimento. Si considera il numero iniziale di quote assunte con P, un tasso di preconto i (non necessariamente garantito) e posto $\bar{z}_{t+1}$ il tasso di variazione al netto di *i*, avremo

$$\overline{w}_{t+1} = (1 + \bar{z}_{t+1})\overline{w}_t$$

con

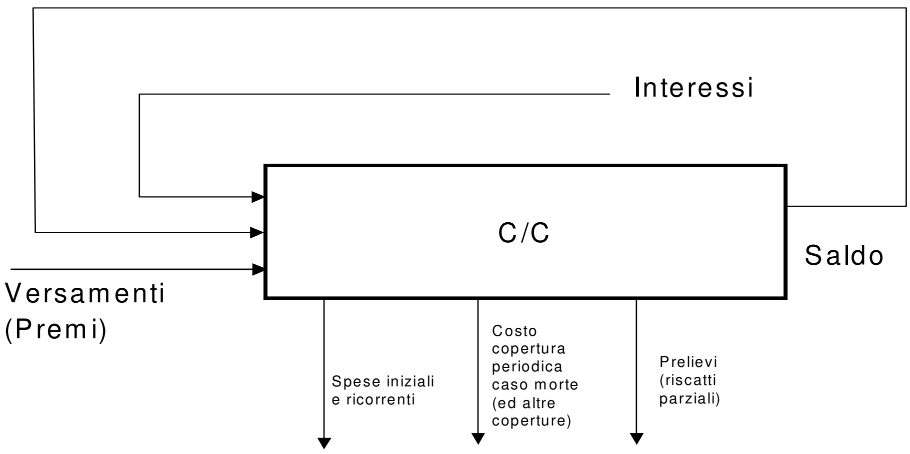
$$1 + \bar{z}_{t+1} = \frac{1 + z_{t+1}}{1 + i}$$

Con tale impostazione si giunge alla stessa fattorizzazione del modello precedente in due elementi di cui il primo dipendente dalla rivalutazione delle quote e il secondo dal livello di premio.

1.7 Assicurazioni Universal Life

Possono essere considerate un'evoluzione delle forme a capitale variabile, in quanto accentuano la libertà di scelta dell'assicurato, il quale può variare sia il livello di premio sia effettuare "prelievi" dalla riserva matematica.

Possono essere costruite sia secondo lo schema "rivalutabile" che quello "unit linked". Esamineremo il primo caso. Si sottolinea la complessità della gestione amministrativa delle UL, a causa proprio della flessibilità e della chiarezza che le contraddistingue, costringendo l'assicuratore ad un continuo aggiornamento della documentazione contrattuale analogamente all'amministrazione e contabilizzazione delle operazioni bancarie.
Lo schema di funzionamento è rappresentato nel grafico seguente:



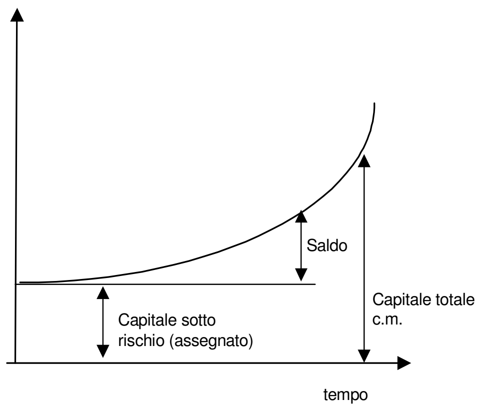
I premi sono di entità variabile e il loro pagamento può essere anche sospeso senza che il rapporto assicurativo si interrompa.

La forma tipica è a <u>Vita Intera</u>. Ciò ha rilievo solo ai fini del calcolo del livello iniziale del premio e nella definizione delle modalità di conclusione del contratto: per decesso o per prelievo dell'intero saldo del C/C.

La prestazione caso morte è data dalla somma del saldo e di un importo (costante o variabile) che rappresenta il capitale sotto rischio. Nel grafico seguente riportiamo due diverse opzioni, in cui la prima (assegnazione del capitale sottorischio) ha come capitale sottorischio l'importo costante C', mentre nella seconda (assegnazione del capitale caso morte totale) il capitale C_t= max {C'+– S_t; C''} e quindi il capitale sottorischio è :

$$C_t - S_t = \max \{C'; C'' — S_t \}$$

• I opzione => $C_t = C' + S_t$



• II opzione => $C_t = \max \{C' + S_t; C''\}$