

IL METODO FISHER-LANGE

Materiale didattico a cura di Domenico Giorgio

Attuario Danni di Gruppo

Società Cattolica di Assicurazioni

METODO FISHER-LANGE

Il metodo Fisher-Lange (di seguito FL) si basa sull'implementazione di:

- un *modello di cadenza dei sinistri* ancora aperti alla data di valutazione;
- un *modello di stima dell'onere medio* che l'impresa dovrà sostenere per la loro definizione.

Combinando i due modelli è possibile proiettare il fabbisogno di riserva per ciascuna generazione; i modelli, definiti in funzione di ogni antidurata, vengono implementati mediante l'osservazione di serie storiche aziendali che consentono di individuare dei trend, in termini di movimentazione, liquidazione dei sinistri e valori economici relativi, ritenuti ripetibili nel futuro e quindi depurati da eventuali anomalie.

In origine il modello FL è nato come modello di stima della riserva sinistri per database organizzati secondo l'anno di denuncia. Tale modello ha avuto ampia diffusione nel mercato assicurativo italiano, a differenza di quello anglosassone o americano, proprio per tale circostanza.

Tuttavia a seguito del Provvedimento ISVAP n. 1059 G, del 4 dicembre 1998, che dall'esercizio 2000 ha introdotto la classificazione dei sinistri per anno di accadimento, si è reso necessario implementare un modello alternativo che tenesse conto del nuovo sistema organizzativo; si ha così:

- ✓ *modello di proiezione al netto dei tardivi*
- ✓ *modello di proiezione dei tardivi.*

Nella prassi sono diffuse due implementazioni del modello:

1. *statico* → il modello di cadenza dei sinistri è costruito su un contingente di sinistri aperti (si stima) che risulteranno con seguito (gli impatti dei movimenti per riaperture e per senza seguito sono calcolati ab initio sul contingente dei sinistri aperti);
2. *dinamico* → i movimenti per riaperture e per senza seguito sono modellizzati anno per anno.

Nella pratica è preferibile utilizzare il modello dinamico perché rispecchia il movimento “naturale” che caratterizza la fenomenologia dei sinistri nella realtà: i sinistri aperti alla data di valutazione, per ciascun anno del modello di cadenza ed in funzione dell’antidurata raggiunta, vengono movimentati in un primo momento con aliquote medie che sintetizzano il saldo riaperture-senza seguito e successivamente con aliquote medie che quantificano il comportamento liquidativi, stimato sui dati aziendali al netto del saldo suddetto.

L’applicazione anno per anno delle movimentazioni per riaperture e per senza seguito consente di individuare una distribuzione temporale del flusso monetario in uscita più aderente alla realtà, senza alterare quello che è l’effetto finanziario conseguente.

Fisher-Lange Modello di proiezione al netto dei tardivi

Modello di cadenza dei sinistri

- Organizzato per antidurata e per anno di bilancio
- Input
 - sinistri a riserva iniziale;
 - sinistri senza seguito da riservati iniziali;
 - sinistri riaperti;
 - sinistri pagati da riservati iniziali e da riaperti;
 - sinistri a riserva finale.

Formalmente si indichi con:

$n_{ri_{j,k-1}}$ il numero dei sinistri a riserva iniziale per la generazione che nell’esercizio k-i ha un’antidurata pari a j

$n_{ss_{j,k-1}}$ il numero dei sinistri senza seguito da riservati iniziale per la generazione che nell’esercizio k-i ha un’antidurata pari a j

$n_{rp_{j,k-1}}$ il numero dei sinistri riaperti per la generazione che nell’esercizio k-i ha un’antidurata pari a j

$n_p_{j,k-1}$ il numero dei sinistri pagati da riservati iniziale e da riaperti per la generazione che nell'esercizio k-i ha un'antidurata pari a j

$n_rf_{j,k-1}$ il numero dei sinistri riservati per la generazione che nell'esercizio k ha un'antidurata pari a j

Con riferimento ai generici dati di input si definiscono le seguenti incidenze dipendenti dall'antidurata j e dall'anno di esercizio k-i:

- *incidenza delle riaperture nette*

$$IncRP_{j,k-i}^{nette} = \frac{n_rp_{j,k-i} - n_ss_{j,k-i}}{n_ri_{j,k-i}}$$

che rappresenta il saldo relativo ai movimenti per sinistri riaperti e per sinistri senza seguito, calcolato al netto dei sinistri tardivi, e rapportato ai sinistri aperti all'inizio dell'anno

- *incidenza dei pagamenti*

$$VL_{j,k-i} = \frac{n_p_{j,k-i}}{n_ri_{j,k-i} + n_rp_{j,k-i} - n_ss_{j,k-i}}$$

che rappresenta il numero dei sinistri pagati, calcolato al netto dei sinistri tardivi, rapportato ai sinistri aperti all'inizio dell'anno dopo l'aggiustamento per le movimentazioni.

Il metodo ipotizza che al variare di j le incidenze descritte non dipendano più, a meno di variazioni aleatorie, dall'anno di bilancio k-i-esimo ma risultino funzione della sola antidurata j-esima; si indichino i vettori per ogni j delle suddette incidenze con:

- vettore delle movimentazioni, di elemento generico:

$$MOV_j = f\{IncRP_{j,k-i}^{nette}\}$$

- vettore della velocità di liquidazione, di elemento generico:

$$VL_j = f\{VL_{j,k-i}\}$$

con f generica funzione (in genere media semplice o medie ponderate delle singole incidenze su un numero di anni di esercizio fissato dal valutatore).

In funzione dei due vettori, per ciascun anno futuro $k + s$, $s = 1, \dots, t$, e $j \geq s$, e per ciascuna antidurata j , si valuta ricorsivamente:

- il numero dei sinistri movimentati per riaperture e per senza seguito

$$n_mov_{j,k+s} = n_rf_{j-1,k+s-1} \times MOV_j$$

- il numero di esposti al “rischio” di pagamento

$$n_cs_{j,k+s} = n_mov_{j,k+s-1} + n_rf_{j-1,k+s-1}$$

- il numero di sinistri pagati

$$n_p_{j,k+s} = n_cs_{j,k+s} \times VL_j$$

- il numero dei sinistri a riserva finale

$$n_rf_{j,k+s} = n_cs_{j,k+s} - n_p_{j,k+s}$$

Modello dell'onore medio

- Organizzato per antidurata e per anno di bilancio
- Input
 - sinistri pagati da riservati iniziali e da riaperti;
 - importo pagato per sinistri da riservati iniziali e da riaperti;
 - tasso di inflazione passata;
 - tasso stimato di inflazione futura.

Formalmente si indichi con:

| | |
|----------------|---|
| $n_p_{j,k-1}$ | il numero dei sinistri pagati da riservati iniziale e da riaperti per la generazione che nell'esercizio $k-i$ ha un'antidurata pari a j |
| $i_p_{j,k-1}$ | importo dei sinistri pagati da riservati iniziale e da riaperti per la generazione che nell'esercizio $k-i$ ha un'antidurata pari a j |
| I_{k-1} | tasso di inflazione utilizzato per il generico anno $k-i$ |
| I_{k+s} | tasso di inflazione stimato per il generico anno futuro $k+s$. |

Con riferimento ai generici dati di input si definiscono i seguenti costi medi dipendenti dall'antidurata j-esima e dall'anno di bilancio k-i-esimo:

- *costo medio pagato:*

$$CmP_{j,k-i} = \frac{i - p_{j,k-i}}{n - p_{j,k-i}}$$

- *costo medio pagato inflazionato ai valori k:*

$$CmP_{j,k-i}^k = CmP_{j,k-i} \times \prod_{h=k-i}^k (1 + I_h)$$

Il metodo ipotizza che al variare di j il costo medio inflazionato non dipenda più, a meno di variazioni aleatorie, dall'anno di bilancio k-i-esimo ma risulti funzione della sola antidurata j-esima; si indichi il vettore per ogni j del suddetto indicatore con:

- *vettore costi medi*, di elemento generico:

$$CM_j = f\{CmP_{j,k-i}^k\}$$

con f generica funzione (in genere media semplice o medie ponderate delle singole incidenze su un numero di anni di esercizio fissato dal valutatore).

In funzione del vettore descritto, per ciascun anno futuro k + s, s = 1, ..., t, e j ≥ s, e per ciascuna antidurata j, si valuta l'importo medio che l'impresa sosterrà per liquidare i sinistri:

$$CmP_{j,k+s} = CM_j \times \prod_{h=1}^s (1 + I_{h+k})$$

Combinando i due modelli individuali è possibile ora valutare il fabbisogno di riserva totale da appostare nell'anno di valutazione per ciascuna generazione:

$$i - rf_j = \sum_{s=1}^t (CmP_{j,k+s} \times n - p_{j,k+s})$$

Fisher-Lange Modello di proiezione dei tardivi

Modello di cadenza dei sinistri

- Organizzato per antidurata e per anno di bilancio
- Input
 - Sinistri denunciati nell'esercizio;
 - sinistri a riserva iniziale;
 - sinistri senza seguito da denunciati e da riservati iniziali;
 - sinistri senza seguito da denunciati;
 - sinistri riaperti;
 - sinistri pagati da denunciati, da riservati iniziali e da riaperti;
 - sinistri pagati da denunciati;
 - sinistri non denunciati non tardivamente nell'anno di avvenimento del sinistro.

Formalmente si indichi con:

- ${}_t n_{-d}_{j,k-1}$ il numero dei sinistri denunciati tardivamente nell'esercizio k-i, relativi alla generazione che ha antidurata pari a j;
- ${}_t n_{-ri}_{j,k-1}$ il numero di sinistri a riserva iniziale nell'esercizio k-i, relativi alla generazione che ha un'antidurata pari a j;
- ${}_t n_{-ss}_{j,k-1}$ il numero dei sinistri senza seguito (da denunciati e da riservati iniziale) nell'esercizio k-i, relativi alla generazione che ha un'antidurata pari a j;
- ${}_t n_{-ss'}_{j,k-i}$ il numero dei sinistri senza seguito (da denunciati) nell'esercizio k-i, relativi alla generazione che ha un'antidurata pari a j;
- ${}_t n_{-rp}_{j,k-1}$ il numero dei sinistri riaperti nell'esercizio k-i, relativi alla generazione che ha un'antidurata pari a j;

- ${}_t n - p_{j,k-i}$ il numero dei sinistri pagati (da denunciati, da riservati iniziale e da riaperti) nell'esercizio k-i, relativi alla generazione che ha un'antidurata pari a j;
- ${}_t n - p'_{j,k-i}$ il numero dei sinistri pagati (da denunciati) nell'esercizio k-i, relativi alla generazione che ha un'antidurata pari a j;
- ${}_t n - d_{0,k-i}$ il numero dei sinistri denunciati e avvenuti nell'esercizio k-i, relativi alla generazione che ha un'antidurata pari a 0.

Con riferimento ai generici dati di input si definiscono le seguenti incidenze dipendenti dall'antidurata j e dall'anno di esercizio k-i:

- *incidenza delle denunce tardive*

$$IncD'_{j,k-i} = \frac{{}_t n - d_{j,k-i}}{{}_t n - d_{0,k-j-i}} \text{ con } j = 1, \dots, t \text{ e } k_0 \leq k - j - i < k$$

che rappresenta l'incidenza dei sinistri tardivi, per ciascuna antidurata, sui sinistri denunciati nell'anno di avvenimento dei sinistri;

- *incidenza delle riaperture nette*

$$IncRP_{j,k-i}^{nette} = \frac{{}_t n - rp_{j,k-i} - {}_t n - ss_{j,k-i}}{{}_t n - d_{j,k-i} + {}_t n - ri_{j,k-i}}$$

che rappresenta il saldo relativo ai movimenti per sinistri riaperti e per sinistri senza seguito, rapportato al contingente dei sinistri denunciati tardivamente nell'anno e dei sinistri a riserva iniziale nell'anno;

- *incidenza dei pagamenti*

$$VL_{j,k-i} = \frac{{}_t n - p_{j,k-i}}{{}_t n - d_{j,k-i} + {}_t n - ri_{j,k-i} + {}_t n - rp_{j,k-i} - {}_t n - ss_{j,k-i}}$$

che rappresenta il numero dei sinistri pagati, rapportato ai sinistri aperti all'inizio dell'anno dopo l'aggiustamento per le movimentazioni e per le nuove denunce tardive.

Per il primo anno di sviluppo del modello è necessario calcolare le incidenze senza tener conto dei sinistri denunciati tardivamente negli esercizi precedenti e presenti a riserva iniziale:

- *incidenza dei sinistri senza seguito da denunciati*

$$IncSS_{j,k-i} = \frac{{}_t n_{-SS'_{j,k-i}}}{n_{-d_{j,k-i}}}$$

- *incidenza dei pagamenti da denunciati*

$$VL'_{j,k-i} = \frac{{}_t n_{-P'_{j,k-i}}}{{}_t n_{-d_{j,k-i}} - {}_t n_{-SS'_{j,k-i}}}$$

Il metodo ipotizza che al variare di j le incidenze descritte non dipendano più, a meno di variazioni aleatorie, dall'anno di bilancio k-i-esimo ma risultino funzione della sola antidurata j-esima; si indichino i vettori per ogni j delle suddette incidenze con:

- vettore delle denunce tardive, di elemento generico:

$$DEN_j = f\{IncD'_{j,k-i}\}$$

- vettore delle movimentazioni, di elemento generico:

$$MOV_j = f\{IncRP_{j,k-i}^{nette}\}$$

- vettore della velocità di liquidazione, di elemento generico:

$$VL_j = f\{VL_{j,k-i}\}$$

- vettore dei senza seguito da denunciati, di elemento generico:

$$SS_j = f\{IncSS_{j,k-i}\}$$

- vettore dei pagamenti da denunciai, di elemento generico:

$$VL_j^i = f\{VL'_{j,k-i}\}$$

con f generica funzione (in genere media semplice o medie ponderate delle singole incidenze su un numero di anni di esercizio fissato dal valutatore).

In funzione dei primi tre vettori, per ciascun anno futuro $k + s$, $s = 1, \dots, t$, e $j \geq s$, e per ciascuna antidurata j , si valuta ricorsivamente:

- il numero dei sinistri tardivi

$$n_den_{j,k+s} = n_d_{0,k-j} \times DEN_j$$

- il numero dei sinistri movimentati per riaperture e per senza seguito

$$n_mov_{j,k+s} = [n_rf_{j-1,k+s-1} + n_den_{j,k+s}] \times MOV_j$$

dove con $n_rf_{j-1,k+s-1}$ si è indicato, per l'antidurata generica $j-1$, il numero dei sinistri denunciati tardivi a riserva nell'anno $k+s-1$

- il numero di esposti al “rischio” di pagamento

$$n_cs_{j,k+s} = n_mov_{j,k+s} + n_rf_{j-1,k+s-1} + n_den_{j,k+s}$$

- il numero di sinistri pagati

$$n_p_{j,k+s} = n_cs_{j,k+s} \times VL_j$$

- il numero dei sinistri a riserva finale

$$n_rf_{j,k+s} = n_cs_{j,k+s} - n_p_{j,k+s}$$

In particolare nel primo anno del modello ricorsivo, $s = 1$:

- il numero dei sinistri movimentati si ottiene applicando il vettore dei senza seguito da denunciati ai sinistri che si stima saranno denunciati tardivamente in $k+1$

$$n_mov_{j,k+1} = n_den_{j,k+1} \times SS_j$$

- il numero dei sinistri esposti al “rischio” si ottiene aggiungendo alla stima dei denunciati la stima dei sinistri movimentati in $k+1$

$$n_cs_{j,k+1} = n_mov_{j,k+1} + n_den_{j,k+1}$$

- il numero dei sinistri pagati si ottiene applicando il vettore dei pagamenti da denunciati agli esposti al rischio stimati in $k+1$

$$n_p_{j,k+1} = n_cs_{j,k+1} \times VL_j$$

Modello dell'onore medio

- Organizzato per antidurata e per anno di bilancio
- Input
 - sinistri pagati da denunciati, da riservati iniziali e da riaperti;
 - sinistri pagati da denunciati;
 - importo pagato per sinistri da denunciati, da riservati iniziali e da riaperti;
 - importo pagato per sinistri da denunciati;
 - tasso di inflazione passata;
 - tasso stimato di inflazione futura.

Formalmente si indichi con:

- ${}_i n_{-p_{j,k-i}}$ il numero dei sinistri pagati (da denunciati, da riservati iniziale e da riaperti) nell'esercizio k-i, relativi alla generazione che ha un'antidurata pari a j;
- ${}_i n'_{-p'_{j,k-i}}$ il numero dei sinistri pagati (da denunciati) nell'esercizio k-i, relativi alla generazione che ha un'antidurata pari a j;
- ${}_i i_{-p_{j,k-i}}$ importo dei sinistri pagati (da denunciati, da riservati iniziale e da riaperti) nell'esercizio k-i, relativi alla generazione che ha un'antidurata pari a j;
- ${}_i i'_{-p'_{j,k-i}}$ importo dei sinistri pagati (da denunciati) nell'esercizio k-i, relativi alla generazione che ha un'antidurata pari a j;
- I_{k-1} tasso di inflazione utilizzato per il generico anno k-i
- I_{k+s} tasso di inflazione stimato per il generico anno futuro k+s.

Con riferimento ai generici dati di input si definiscono i seguenti costi medi dipendenti dall'antidurata j-esima e dall'anno di bilancio k-i-esimo:

- *costo medio pagato:*

$$CmP_{j,k-i} = \frac{{}_t i - P_{j,k-i}}{{}_t n - P_{j,k-i}}$$

- *costo medio pagato inflazionato ai valori k:*

$${}_k CmP_{j,k-i}^k = CmP_{j,k-i} \times \prod_{h=k-i}^k (1 + I_h)$$

Nel primo anno di sviluppo del modello è necessario calcolare i costi medi senza tener conto dei sinistri denunciati tardivamente negli esercizi precedenti e presenti a riserva iniziale:

- *costo medio pagato (da denunciati):*

$$CmP'_{j,k-i} = \frac{{}_t i - P'_{j,k-i}}{{}_t n - P'_{j,k-i}}$$

- *costo medio pagato (da denunciati) inflazionato ai valori k:*

$${}_k CmP'_{j,k-i} = CmP'_{j,k-i} \times \prod_{h=k-i}^k (1 + I_h)$$

Il metodo ipotizza che al variare di j il costo medio inflazionato non dipenda più, a meno di variazioni aleatorie, dall'anno di bilancio k-i-esimo ma risulti funzione della sola antidurata j-esima; si indichi il vettore per ogni j del suddetto indicatore con:

- *vettore costi medi pagati, di elemento generico:*

$$CM_j = f\{ {}_k CmP_{j,k-i} \}$$

- *vettore costi medi pagati da denunciati, di elemento generico:*

$$CM_j = f\{ {}_k CmP'_{j,k-i} \}$$

con f generica funzione (in genere media semplice o medie ponderate delle singole incidenze su un numero di anni di esercizio fissato dal valutatore).

In funzione del primo vettore, per ciascun anno futuro $k + s$, $s = 1, \dots, t$, e $j \geq s$, e per ciascuna antidurata j , si valuta l'importo medio che l'impresa sosterrà per liquidare i sinistri:

$$CmP_{j,k+s} = CM_j \times \prod_{h=1}^s (1 + I_{h+k})$$

In particolare nel primo anno del modello, per $s = 1$

$$CmP_{j,k+1} = CM'_j \times \prod_{h=1}^s (1 + I_{h+k})$$

Combinando i due modelli individuali è possibile ora valutare il fabbisogno di riserva totale da appostare nell'anno di valutazione per ciascuna generazione:

$$i_rf_j = \sum_{s=1}^t (CmP_{j,k+s} \times n_p_{j,k+s})$$