IL MODELLO DI MACK

Materiale didattico a cura di Domenico Giorgio

Attuario Danni di Gruppo

Società Cattolica di Assicurazioni

CHAIN-LADDER CLASSICO

- Metodo più utilizzato per la stima della riserva sinistri
    1. Semplicità
    2. Distribution-free

Consiste nella formulazione di una proiezione del valore di riserva sulla base dell'analisi proiettiva dei dati, ottenuta attraverso l'esame di serie storiche rilevate nel passato e rappresentate nel passato attraverso uno schema di tipo triangolare, run-off, del tipo:

	0	…	j	…	…	…	t
0	$X_{0,0}$		$X_{0,j}$				$X_{0,t}$
…							
i	$X_{i,0}$	…	$X_{i,j}$	…	$X_{i,t-1}$		
…							
…							
…							
t	$X_{t,0}$						

$X_{h,k}$ $\rightarrow$ Fattori non noti all'epoca t

dove

$X_{i,j}$ per i = 0, …, t e j = 0, …, t – i, l'elemento generico del run-off noto all'epoca t, relativo alla generazione i-esima dopo j anni di differimento nell'anno di bilancio j + i

$X_{h,k}$ per h = 1, …, t e k = 0, …, t – i, l'elemento generico del run-off incognito all'epoca t, relativo alla generazione h-esima dopo k anni di differimento nell'anno di bilancio k + h t lunghezza del run-off coincidente con l'estensione massima dello sviluppo della generazione meno recente (generazione 0)

Sul run-off definiamo i *fattori di sviluppo incrementali*, funzione della generazione i-esima e dell'anno di sviluppo j-esimo:

$$f_j = \frac{\sum_{i=1}^{t-j} X_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{t-j} X_{i,j}} \quad per \;\; 1 \le j \le t-1$$

Tali fattori descrivono lo sviluppo liquidativo per la generazione i-esima dall'anno di sviluppo j-1-esimo a quello j-esimo, noto all'epoca di valutazione.

Ipotesi:

- Al variare di j, il fattore di sviluppo incrementale non dipende più, a meno di variazioni aleatorie, dalla generazione i-esima, ma risulti funzione del solo anno di sviluppo j-esimo

Dopo aver determinato tutti i fattori di sviluppo f_j, j = 1, …, t-1, è possibile ottenere delle stime per i futuri esborsi e quindi valutare la riserva.

I futuri esborsi possono essere calcolati in maniera ricorsiva passando da una colonna a quella successiva, ovvero:

$$\hat{X}_{i,j} = X_{ij} \cdot f_j, \text{ i = 2, …, t e j = 1, …, t – 1.}$$

La riserva stimata $\hat{R}_i$ sarà data da:

$$\hat{R}_i = \hat{X}_{it} - X_{i,t-i+1}.$$

IL MODELLO DI MACK

- Metodo proposto nel 1993
- Modello di tipo stocastico → riproduce le stesse stime del Chain-Ladder, specificando semplicemente i primi due momenti della distribuzione dei risarcimenti cumulati e considerando pertanto il modello privo di distribuzione
- Stima dell'errore standard relativo ad ogni anno di generazione come misura dell'incertezza contenuta nei dati
- I fattori di sviluppo non sono correlati tra loro e ciò comporta una stima non distorta della riserva sinistri
- Stima dell'errore standard complessivo per la riserva globale. Tale stima ha l'importante proprietà di tenere in considerazione le correlazioni tra le stime individuali relative alle singole riserve riguardanti i vari anni di generazione.

Ricordiamo che X_{ij} rappresenta il risarcimento cumulato relativo all0anno di generazione *i*, *i = 1, …, k*, pagato con un differimento di *j* anni, *j = 1, …, k*.
Si ipotizza che X_{ij} sia una variabile aleatoria di cui disponiamo di alcuni suoi valori nel caso $i + j \leq k + 1$ (dati del triangolo run off).
L'ipotesi che sta alla base del metodo della catena si può riassumere in

$$E(X_{i,j+1} / X_{i1}, X_{i2}, ..., X_{ij}) = f_j \cdot X_{ij},\ i=1,\ldots,\ k \text{ e } j = 1,\ldots,\ k\text{-}1$$

dove f_j rappresentano i fattori di sviluppo incrementali.
Quindi la legge fondamentale che regola il metodo della catena è quella di costanza nel tempo della progressione con cui vengono liquidati i sinistri, legge nota come "*progressione di smontamento dei sinistri*".
Questo significa escludere ogni possibile dipendenza tra gli anni di generazione, vale a dire ipotizzare che le variabili aleatorie X_{ij} sono indipendenti nei diversi anni di generazione *i*. Quindi:

$\{X_{i1}, X_{i2},..., X_{ik}\}$e $\{X_{j1}, X_{j2},..., X_{jk}\}$ con $i \neq j$ sono indipendenti.

Osservazione.

Ipotesi abbastanza forte, in quanto, col tempo, possono verificarsi fattori esterni od interni all'impresa che modificano le attuali condizioni di pagamento dei sinistri (ad es. mutate modalità con cui vengono trattati i sinistri, aggiornamento del processo di liquidazione, inflazione,…)

Cio premesso, è possibile esprimere l'errore standard della stima $\hat{X}_{ik}$ di X_{ik} come:

$$mse(\hat{X}_{ik}) = E\left(\left(\hat{X}_{ik} - X_{ik}\right)^2 / D\right),$$

dove $D = \{X_{ij} / i + j \leq k+1\}$, ossia sono i valori della matrice dati osservati.

Dalla relazione $E(X-a)^2 = Var(x) + (E(X) - a)^2$

Segue

$$mse(\hat{X}_{ik}) = Var(X_{ik} / D) + (E(X_{ik} / D) - \hat{X}_{ik})^2,$$

la quale mostra come l'errore quadratico medio sia componibile nella somma di due termini:

1. varianza del processo
2. l'effettivo errore di stima

E' evidente che per ottenere una stima dell'errore quadratico medio di $\hat{X}_{ik}$ occorre specificare una formula per la varianza X_{ik}.

Poiché i fattori di sviluppo $\hat{f}_j$ sono delle medie ponderate dei fattori $\frac{X_{i,j+1}}{X_{ij}}$, ciò suggerisce che la $Var(X_{i,j+1} / X_{ij} \mid X_{i1},..., X_{i1})$ deve essere inversamente proporzionale a X_{ij}, ossia:

$$Var(X_{i,j+1} \mid X_{i1},..., X_{ij}) = X_{ij} \cdot \sigma_j^2 \; con \, i = 1,..., k \; e \; j = 1,...k-1$$

e dove $\sigma_j^2, j = 1,..., k-1,$ è un parametro incognito da stimare dai dati.

Una possibile stima corretta per tale parametro è:

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{k-j-1} \sum_{i=1}^{k-j} X_{ij} \left(\frac{X_{i,j+1}}{X_{ij}} - \hat{f}_j \right)^2 \; con \; j = 1,..., k-2.$$

Questa espressione non è altro che una media ponderata dei residui; il denominatore rappresenta il numero ei residui meno uno, il che fornisce una stima non distorta di σ_j^2.

Per completare la stima di σ_j^2 per ogni *j = 1,..., k-1* occorre assegnare un valore a

$$\sigma_{k-1}^2 = \min(\hat{\sigma}_{k-2}^4 / \hat{\sigma}_{k-3}^2, \min(\hat{\sigma}_{k-3}^2, \hat{\sigma}_{k-2}^2)).$$

Sotto tutte queste ipotesi è possibile dimostrare che l'errore quadratico medio di $\hat{R}_i$, *i = 2, ..., k,* è dato da:

$$mse(\hat{R}_i) = \hat{X}_{ik}^2 \sum_{j=k+1-i}^{k-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j^2} \left(\frac{1}{\hat{X}_{ij}} + \frac{1}{\sum_{z=1}^{k-j} X_{zj}} \right),$$

dove $\hat{X}_{ij} = X_{i,k+1-i} \cdot \hat{f}_{k+1-i} \cdot ... \cdot \hat{f}_{k-1} \; con \; j > k+1-i$ sono le stime future.

Spesso risulta di particolare interesse la stima dell'errore quadratico medio complessivo, quello relativo alla riserva globale, nonché somma di tutte le riserve nei vari anni di generazione, $\hat{R} = \hat{R}_2 + ... + \hat{R}_k$.

Tale quantità non può essere semplicemente ottenuta sommando i singoli errori quadratici medi, poiché essi sono correlati per via dei fattori di sviluppo $\hat{f}_j$ e le quantità $\hat{\sigma}_j^2$.

Un'espressione in grado di effettuare una correzione che tenga conto delle covarianze è data da:

$$mse(\hat{R}) = \sum_{i=2}^{k} \left\{ \left(s.e(\hat{R}_i) \right)^2 + \hat{X}_{ik} \left(\sum_{z=i+1}^{k} \hat{X}_{zk} \right) \sum_{j=k+1-i}^{k-1} \frac{2\hat{\sigma}_j^2 / \hat{f}_j^2}{\sum_{n=1}^{k-j} X_{nj}} \right\}$$

dove $\hat{R} = \sum_{i=2}^{k} \hat{R}_i$.

L'errore standard riflette inesattezze delle stima dovuta all'aleatorietà delle variabili coinvolte nelle valutazioni; tuttavia non è in grado di cogliere il cosiddetto errore di specificazione, ossia l'errore che si commette nello specificare il modello utilizzato per effettuare l’analisi, secondo tale considerazione non si può escludere che il modello adottato sia sbagliato.